

Odhad parametru p binomického rozdělení a test hypotézy o tomto parametru

Test hypotézy o parametru p binomického rozdělení

Motivační úloha. Předpokládejme, že v důsledku realizace jistého náhodného pokusu $\mathcal{P}$ dochází s pravděpodobností p , kde $0 < p < 1$, k výskytu jistého náhodného jevu A . Úkolem je testovat hypotézu $H_0 : p = p_0$, kde p_0 je dané číslo.

Řešení. Uvažme sérii n vzájemně nezávislých realizací pokusu $\mathcal{P}$ a označme X počet těch realizací, při nichž dojde k výskytu jevu A . Veličina X má rozdělení $Bi(n, p)$, testujeme tedy hypotézu o parametru p binomického rozdělení.

Za testovací statistiku pro hypotézu $H_0 : p = p_0$ budeme považovat přímo veličinu X . Hypotézu H_0 zamítneme tehdy, jestliže zaznamenaná hodnota veličiny X , tj. zaznamenaný počet výskytů jevu A v sérii n vzájemně nezávislých realizací pokusu $\mathcal{P}$, je příliš velká, resp. příliš malá na to, aby takto velká či malá hodnota mohla být za platnosti hypotézy H_0 zaznamenaná s dostatečně velikou pravděpodobností.

Formálněji řečeno, hypotézu H_0 zamítneme tehdy, jestliže $X \leq k_1$ nebo $X \geq k_2$, tj. tehdy, jestliže

$$X \in (-\infty, k_1] \cup [k_2, \infty),$$

kde k_1 a k_2 jsou kritické hodnoty, které je třeba objektivně stanovit dříve než přistoupíme k vlastnímu testování. Budeme přitom požadovat, aby hladina významnosti testu (tj. pravděpodobnost zamítnutí hypotézy, která je správná) nepřekročila určitou předem zadanou mez α , kde $0 < \alpha < 1$. Předpokládejme proto, že hypotéza H_0 je správná, tj. že $X \sim Bi(n, p_0)$, a zvolme hodnoty k_1 a k_2 tak, aby

$$P(X \leq k_1 \vee X \geq k_2) < \alpha.$$

Volba konkrétních hodnot k_1 a k_2 závisí na tom, jakou bude mít testovaná hypotéza alternativu. Uvažujme nejprve oboustrannou alternativu $H_1 : p \neq p_0$. To odpovídá situaci, kdy o hodnotě parametru p nemáme vůbec žádnou předběžnou znalost a hypotézu H_0 tudíž zamítáme jak z důvodu příliš malých tak příliš velkých zaznamenaných hodnot veličiny X . Hodnoty k_1 a k_2 volíme proto v tomto případě tak, aby

$$P(X \leq k_1) < \alpha/2 \quad \text{a} \quad P(X \geq k_2) < \alpha/2.$$

Přirozeně též požadujeme, aby daný test měl co možná největší sílu (zamítal s co největší pravděpodobností nesprávné hypotézy), a proto volíme čísla k_1 a k_2 tak, aby kritická oblast (oblast zamítání) $(-\infty, k_1] \cup [k_2, \infty)$ pro hypotézu H_0 byla co největší. Definujeme tedy k_1 jako největší nezáporné celé číslo vyhovující podmínce $P(X \leq k_1) < \alpha/2$ a k_2 jako nejmenší nezáporné celé číslo vyhovující podmínce $P(X \geq k_2) < \alpha/2$. Určení kritických hodnot pro jednostranné alternativy $H_1 : p > p_0$ a $H_1 : p < p_0$ probíhá obdobně.

Z důvodů snazšího vyjadřování zavedeme pro kritické hodnoty binomického rozdělení následující označení.

Označení. Necht' $p_0 \in (0, 1)$ je pevně zadané číslo. Položme

$$p_k = \binom{n}{k} p_0^k (1 - p_0)^{n-k}.$$

Pro $0 < \alpha < 1$ definujeme *kritické hodnoty* $k_1 = k_1(\alpha)$ a $k_2 = k_2(\alpha)$ rozdělení $Bi(n, p_0)$ takto: $k_1(\alpha)$ je největší nezáporné celé číslo takové, že $\sum_{k=0}^{k_1} p_k < \alpha$ a $k_2(\alpha)$ je nejmenší nezáporné celé číslo takové, že

$$\sum_{k=k_2}^n p_k < \alpha.$$

Praktická realizace testu hypotézy $H_0 : p = p_0$ probíhá na základě následujících pravidel:

- (1) Hypotéza $H_0 : p = p_0$ se zamítá proti alternativě $H_1 : p \neq p_0$, jestliže $X \leq k_1(\alpha/2)$ nebo $X \geq k_2(\alpha/2)$.
- (2) Hypotéza $H_0 : p = p_0$ se zamítá proti alternativě $H_1 : p > p_0$, jestliže $X \geq k_2(\alpha)$.
- (3) Hypotéza $H_0 : p = p_0$ se zamítá proti alternativě $H_1 : p < p_0$, jestliže $X \leq k_1(\alpha)$.

Hladina významnosti žádného z výše popsaných testů nepřevyšuje číslo α . Lze přitom ukázat, že nelze zkonstruovat žádné jiné testy o parametru p binomického rozdělení, které by měly při dané hladině významnosti ve srovnání s právě uvedenými testy větší sílu. Lze tedy tyto testy považovat za nejlepší možné.

Příklad 1. Označme p pravděpodobnost, že při hodu danou hrací kostkou padne šestka. Testujme hypotézu $H_0 : p = 1/6$ proti alternativě $H_1 : p \neq 1/6$, a to na základě pokusu, v němž ze sto dvaceti hodů padla šestka

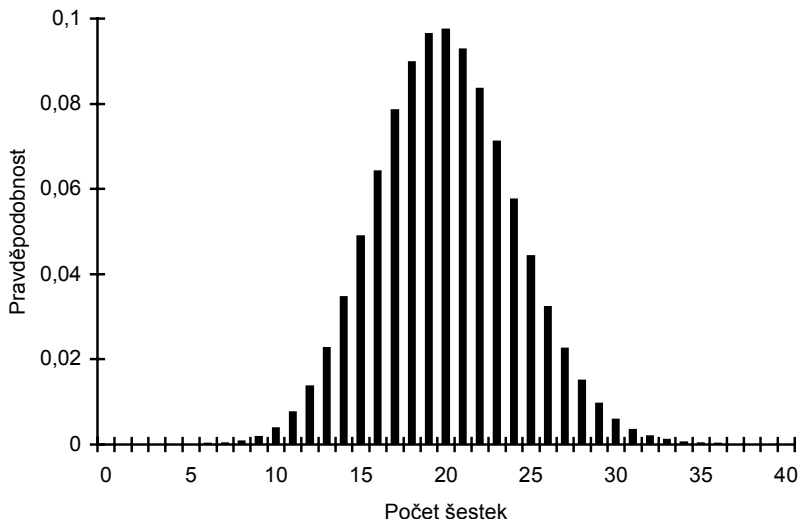
- a) dvacet devětkrát,
- b) dvacet osmkrát,
- c) devětkrát.

Řešení. Označme X zaznamenaný počet šestek v sérii sto dvaceti hodů. Veličina X má rozdělení $Bi(120, p)$. Předpokládejme, že hypotéza H_0 je správná, tj. že $p = 1/6$. Pak

$$P(X \leq 12) \doteq 0,027, P(X \leq 11) \doteq 0,014,$$

$$P(X \geq 28) \doteq 0,037, P(X \geq 29) \doteq 0,022.$$

To znamená, že $k_1 = k_1(0,025) = 11$ a $k_2 = k_2(0,025) = 29$ jsou kritické hodnoty rozdělení $Bi(120, 1/6)$, jímž se veličina X řídí za předpokladu, že H_0 je správná hypotéza (viz následující obrázek).



Rozhodnutí o tom, zda hypotézu zamítneme či nikoliv závisí na empiricky zaznamenaném počtu šestek v sérii. Konkrétně

- a) hypotéza $H_0 : p = 1/6$ se proti alternativě $H_1 : p \neq 1/6$ zamítá na hladině významnosti $\alpha = 0,05$,
 b) hypotéza $H_0 : p = 1/6$ se proti alternativě $H_1 : p \neq 1/6$ nezamítá na hladině významnosti $\alpha = 0,05$,
 c) hypotéza $H_0 : p = 1/6$ se proti alternativě $H_1 : p \neq 1/6$ zamítá na hladině významnosti $\alpha = 0,05$.

Rčení, že „hypotéza se zamítá na hladině významnosti α “ přitom znamená, že skutečná hladina významnosti testu, tj. pravděpodobnost, s níž může dojít k zamítnutí správné hypotézy, je menší než α .

Hladinu významnosti nemůžeme volit extrémně malou, protože jinak by příslušný test měl jen velmi malou sílu. Na druhou stranu případné zamítnutí hypotézy H_0 má mnohem větší váhu, jestliže víme, že pravděpodobnost zamítnutí správné hypotézy je dokonce menší než 0,01 či 0,001. Ptejme se proto, zda se hypotéza H_0 zamítá též na hladině významnosti $\alpha = 0,01$. V tomto případě jsou kritickými hodnotami čísla 9 a 32. Tudíž v případě a) se hypotéza $H_0 : p = 1/6$ proti alternativě $H_1 : p \neq 1/6$ na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ nezamítá (přestože se zamítá na hladině významnosti $\alpha = 0,05$). Tím spíše se pak tato hypotéza nezamítá na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ v případě b). (Koneckonců se v tomto případě nezamítá ani na hladině významnosti $\alpha = 0,05$). V případě c) se hypotéza $H_0 : p = 1/6$ proti alternativě $H_1 : p \neq 1/6$ na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ zamítá.

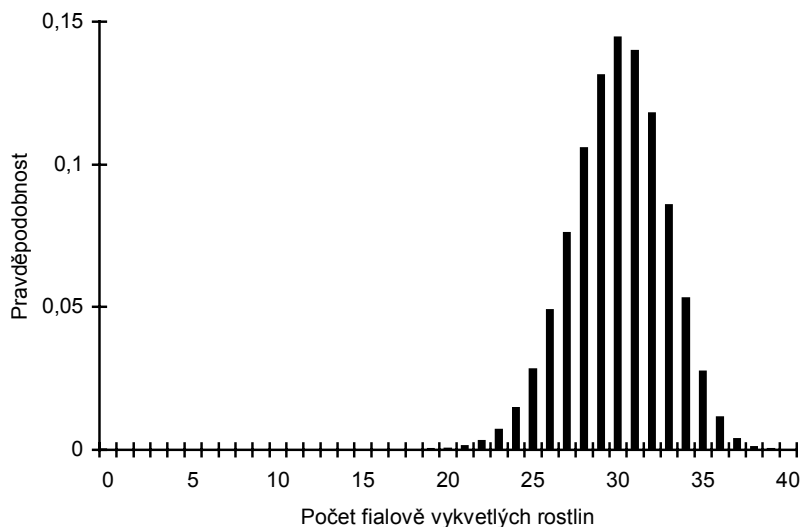
Poznamenejme nakonec, že pro hladinu významnosti $\alpha = 0,001$ jsou kritickými hodnotami čísla 7 a 35.

Příklad 2. Označme p pravděpodobnost, že při hodu danou hrací kostkou padne šestka. Existuje podezření, že je kostka záměrně vyráběna tak, aby šestka padala častěji než ostatní hodnoty. Testujme hypotézu, že tomu tak není, a to na základě pokusu, v němž ze sto dvaceti hodů padla šestka dvacet osmkrát.

Řešení. Nyní testujeme hypotézu $H_0 : p = 1/6$ proti jednostranné alternativě $H_1 : p > 1/6$. Zvolme hladinu významnosti $\alpha = 0,05$. Hypotézu zamítneme tehdy, když zaznamenaný počet šestek X je příliš veliký (větší než kritická hodnota). Malý počet šestek nyní důvodem k zamítnutí hypotézy není. Kritická hodnota k_2 pro test naší hypotézy je nejmenší nezáporné celé číslo takové, že $P(X \geq k_2 \mid p = 1/6) < 0,05$. Snadno nahlédneme, že $k_2 = 28$. Hypotéza $H_0 : p = 1/6$ se tedy proti alternativě $H_1 : p > 1/6$ na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ zamítá, přestože proti oboustranné alternativě $H_1 : p \neq 1/6$ by se na této hladině významnosti nezamítla. Vidíme, že zúžením oboustranné alternativy na jednostrannou se zvýšila síla testu.

Příklad 3. Pěstujeme hrách s bílými a fialovými květy. Podle druhého Mendelova zákona je pravděpodobnost p , že rostlina vykvetle fialově, rovna $3/4$. Testujme platnost tohoto zákona na základě pokusu, v němž ze čtyřiceti náhodně vybraných rostlin jich fialově vykvetlo třicet pět.

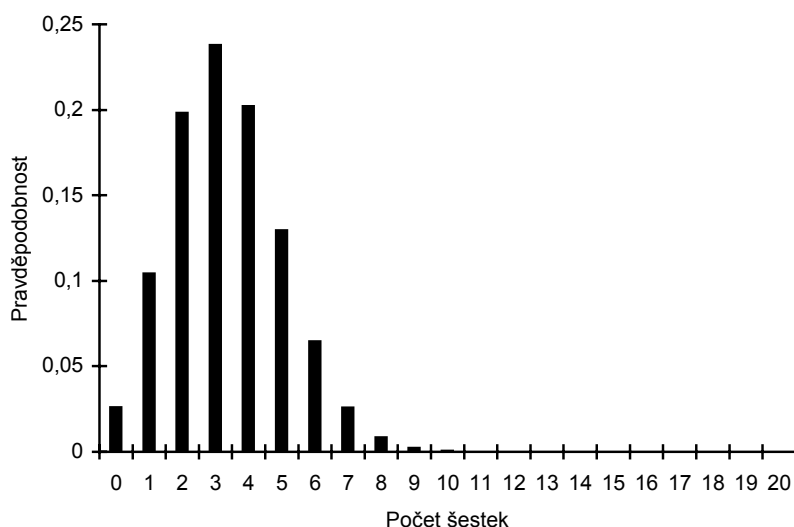
Řešení.



Testujeme hypotézu $H_0 : p = \frac{3}{4}$ proti alternativě $H_1 : p \neq \frac{3}{4}$. Hypotéza se na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ nezamítá.

Příklad 4. Při dvaceti hodech hrací kostkou padla šestka právě devětkrát. Testujme hypotézu, že šestka padá s pravděpodobností $p = \frac{1}{6}$.

Řešení. Hypotéza $H_0 : p = \frac{1}{6}$ se proti alternativě $H_1 : p \neq \frac{1}{6}$ zamítá na hladině významnosti $\alpha = 0,01$, nezamítá se však na hladině významnosti $\alpha = 0,001$. Poznamenejme, že $k_2(0,005) = 9$; kritická hodnota $k_1(0,005)$, a dokonce ani kritická hodnota $k_1(0,025)$ rozdělení $Bi(20, \frac{1}{6})$ však neexistuje, neboť $p_0 = 0,026 > 0,025$. To znamená, že dvacet hodů kostkou je příliš málo na to, aby bylo možno hypotézu $H_0 : p = \frac{1}{6}$ proti oboustranné alternativě $H_1 : p \neq \frac{1}{6}$ zamítnout z důvodu příliš malého zaznamenaného počtu šestek v sérii. Bylo by ji však možno z tohoto důvodu zamítnout na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ proti alternativě $H_1 : p < \frac{1}{6}$, avšak pouze v případě, že by žádná šestka při dvaceti hodech kostkou nepadla.



Znaménkový test

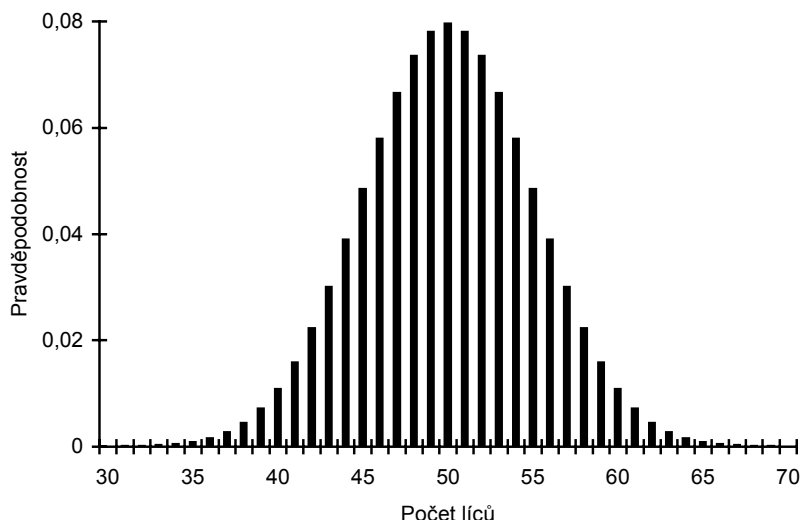
Pro $p_0 = 1/2$ se test hypotézy $H_0 : p = p_0$ o parametru p binomického rozdělení nazývá *testem znaménkovým*.

Příklad 5. Při výrobě mincí je stanovena hmotnost mince pět gramů. Je podezření, že na materiálu se systematicky šetří. Testujme hypotézu, že tomu tak není. Použijeme výsledků náátkové kontroly, při níž bylo náhodně vybráno jedenáct mincí, a poté zjištěno, že devět z nich je lehčích a dvě těžší oproti stanovené normě.

Řešení. Označme X počet těch vybraných mincí, které jsou lehčí než pět gramů. Veličina X má rozdělení $Bi(n, p)$, kde $n = 11$ je počet vybraných mincí a p je pravděpodobnost, že náhodně vybraná mince je lehčí než pět gramů. Testujeme hypotézu $H_0 : p = \frac{1}{2}$, a to proti jednostranné alternativě $H_1 : p > \frac{1}{2}$, neboť možnost, že se mince vyrábějí záměrně těžší a priori vylučujeme. Zaznamenaný počet mincí lehčích než pět gramů je devět (z jedenácti), což je též kritický počet pro zamítnutí testované hypotézy. Hypotéza H_0 se tedy na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ zamítá. Nezamítá se ovšem na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ a rovněž tak by se nezamítla na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ proti oboustranné alternativě. (Poznamenejme, že kritické hodnoty znaménkového testu jsou běžně tabulizovány.)

Příklad 6. Při sto hodech mincí padl dvašedesátkrát líc. Testujme hypotézu, že rub i líc padá se stejnou pravděpodobností.

Řešení. Označme X počet liců. Pak $X \sim Bi(n, p)$, kde $n=100$ je počet hodů a p je pravděpodobnost, že padne líc. Testujeme hypotézu $H_0 : p = \frac{1}{2}$ proti alternativě $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$. „Kritické skóre“ pro hladinu významnosti $\alpha=0,05$ je 39:61; hypotéza H_0 se proto na hladině významnosti $\alpha=0,05$ zamítá. Nezamítá se však na hladině významnosti $\alpha=0,01$.



Další úlohy.

- Točí se na „Céčku“ pivo systematicky pod míru?
- Hraje Karel tenis lépe než Jan?
- Premiér Miloš Zeman vyjádřil v televizním pořadu „7 čili Sedm dní“ vysílaném dne 24. ledna 1999 přesvědčení, že „většina truhlářů v této zemi jsou nestraníci“. Měl pravdu?
- Dává jistá laboratorní metoda stanovující koncentraci určité škodlivé látky v půdě systematicky menší (či větší) hodnoty než jiná metoda?

Odhad parametru p binomického rozdělení

Motivační úloha. Předpokládejme, že v důsledku realizace jistého náhodného pokusu $\mathcal{P}$ dochází s pravděpodobností p , kde $0 < p < 1$, k výskytu jistého náhodného jevu A . Úkolem je odhadnout pravděpodobnost p .

Řešení. Uvažme sérii n vzájemně nezávislých realizací pokusu $\mathcal{P}$ a označme $X=k$ počet těch realizací, při nichž dojde k výskytu jevu A . Veličina X má rozdělení $Bi(n, p)$, odhadovat pravděpodobnost p tedy znamená odhadovat neznámý parametr p binomického rozdělení. Dle principu statistické stability se hodnota veličiny $X/n = k/n$ vyjadřující relativní četnost výskytů jevu A v sérii blíží s rostoucím počtem pokusů n k hodnotě parametru p . Je tedy přirozené odhadovat parametr p touto veličinou. *Jde přitom o nestranný, konzistentní a maximálně věrohodný odhad.* Čísla blízká poměru k/n pak představují takové odhady parametru p , které sice nejsou maximálně věrohodné, jsou však „hodně“ věrohodné. Interval I sestavený z takových hodně věrohodných odhadů parametru p vytvoří intervalový odhad parametru p . Přesná definice takového intervalu je následující. Necht’ $0 < \alpha < 1$. Položme

$$I = \{p_0 \in (0, 1); \text{hypotéza } H_0 : p = p_0 \text{ se na hladině významnosti } \alpha \text{ nezamítá}\}.$$

Takto definovaný interval zřejmě obsahuje číslo k/n a pokrývá hodnotu parametru p s pravděpodobností $1-\alpha$. Meze tohoto intervalu lze přitom vyjádřit analyticky pomocí kritických hodnot rozdělení beta.

Označení. Symbolem $B_{r,s}(\alpha)$ budeme označovat *kritickou hodnotu rozdělení* $B_{r,s}$, tj. takovou hodnotu, která je veličinou s rozdělením $B_{r,s}$ překročena s pravděpodobností α .

Věta 1.

- (1) Jestliže $0 < X < n$, pak interval $(1 - B_{n-X+1,X}(\alpha/2), B_{X+1,n-X}(\alpha/2))$ pokrývá hodnotu parametru p s pravděpodobností $1-\alpha$.
- (2) Jestliže $X > 0$, pak interval $(1 - B_{n-X+1,X}(\alpha), 1)$ pokrývá hodnotu parametru p s pravděpodobností $1-\alpha$.
- (3) Jestliže $X < n$, pak interval $(0, B_{X+1,n-X}(\alpha))$ pokrývá hodnotu parametru p s pravděpodobností $1-\alpha$.

Příklad 7. Necht' p je pravděpodobnost, že při hodu danou hrací kostkou padne šestka. Při dvaceti hodech touto kostkou padla šestka právě devětkrát. Odhadněte hodnotu parametru p .

Řešení. Maximálně věrohodným odhadem parametru p je číslo $9/20 \doteq 0,45$. Dále víme dle výsledku příkladu 4, že hypotéza $H_0 : p = 1/6$ se proti alternativě $H_1 : p \neq 1/6$ zamítá na hladině významnosti $\alpha = 0,01$, a tedy i na hladině významnosti $\alpha = 0,05$. Oboustranný 95% interval spolehlivosti pro parametr p tedy neobsahuje hodnotu $1/6 \doteq 0,167$. Dále lze např. ukázat, že tento interval neobsahuje hodnotu 0,8, neboť hypotéza $H_0 : p = 0,8$ se na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ zamítá proti alternativě $H_1 : p \neq 0,8$ (ověřte to!). Dolní mez oboustranného 95% intervalu spolehlivosti pro parametr p bude tedy větší než číslo 0,16 a jeho horní mez menší než číslo 0,8. Dosazením do vzorců ve větě 1 dostaneme, že interval $(0,231; 0,685)$ pokrývá hodnotu neznámého parametru p s pravděpodobností 0,95 a podobně interval $(0,259; 1)$ pokrývá hodnotu neznámého parametru p s pravděpodobností 0,95.

Asymptotická verze testu o parametru p binomického rozdělení

Předpokládejme opět, že v důsledku realizace jistého náhodného pokusu $\mathcal{P}$ dochází s pravděpodobností p , kde $0 < p < 1$, k výskytu jistého náhodného jevu A a testujeme hypotézu $H_0 : p = p_0$ o parametru p . Tak jako dříve uvažme sérii n vzájemně nezávislých realizací pokusu $\mathcal{P}$ a označme X počet těch realizací, při nichž dojde k výskytu jevu A . Předpokládejme přitom, že číslo n je hodně velké. Jestliže H_0 je správná hypotéza, pak $X \sim Bi(n, p_0)$, a tudíž dle Moivreovy-Laplaceovy věty má veličina

$$U = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$$

pro $n \rightarrow \infty$ asymptoticky rozdělení $N(0, 1)$. Veličinu U lze tedy považovat za testovací statistiku pro hypotézu H_0 . Kritéria pro zamítnutí hypotézy H_0 jsou přitom následující:

- (1) Hypotéza $H_0 : p = p_0$ se zamítá proti alternativě $H_1 : p \neq p_0$, jestliže $|U| \geq u(\alpha/2)$.
- (2) Hypotéza $H_0 : p = p_0$ se zamítá proti alternativě $H_1 : p > p_0$, jestliže $U \geq u(\alpha)$.
- (3) Hypotéza $H_0 : p = p_0$ se zamítá proti alternativě $H_1 : p < p_0$, jestliže $U \leq -u(\alpha)$.

Hladiny významnosti všech těchto testů jsou asymptoticky rovna α .

Příklad 8. Při sto dvaceti hodech hrací kostkou padla devěadvacetkrát šestka. Testujme hypotézu, že šestka padá s pravděpodobností $p_0 = \frac{1}{6}$.

Řešení. Označme p pravděpodobnost, s níž padá šestka. Testujeme hypotézu $H_0 : p = p_0$ proti alternativě $H_1 : p \neq p_0$. Celkový počet hodů je $n = 120$, z toho bylo zaznamenáno $X = 29$ šestek. Tudíž $U \doteq 2,20$. Jelikož $|U| \geq 1,96 = u(0,025)$, testovaná hypotéza se zamítá na hladině významnosti $\alpha = 0,05$. (Porovnejte tento výsledek s výsledkem příkladu 1.)

Příklad 9. Je známo, že smrky po styku s jistým patogenem onemocní s pravděpodobností $p_0 = 0,2$. O určitém ekotypu smrku se však tvrdí, že je odolnější, a naším cílem je ověřit, zda tomu tak skutečně je. Bylo proto zcela náhodně vybráno sto stromů zkoumaného ekotypu, přičemž se ukázalo, že při styku s patogenem onemocnělo právě čtrnáct z nich. Vzniká otázka, zda lze na základě provedeného šetření usoudit, že zmíněný ekotyp je významně odolnější?

Řešení. Nechť p je pravděpodobnost, že smrk přináležející zkoumanému ekotypu při styku s patogenem onemocní. Je třeba testovat hypotézu $H_0 : p = 0,2$ proti alternativě $H_0 : p < 0,2$. Vyjde $|U| \doteq 1,5 < 1,645 = u(0,05)$, což znamená, že hypotézu H_0 nelze zamítnout ani na hladině významnosti $\alpha = 0,05$. Nepodařilo se tedy na základě provedeného šetření prokázat, že smrky zkoumaného ekotypu jsou při styku s patogenem odolnější.

Asymptotická verze znaménkového testu

Pro $p_0 = \frac{1}{2}$ nabývá statistika U speciálního tvaru $U = (2X - n)/\sqrt{n}$.

Příklad 10. Při sto hodech mincí padl dvašedesátkrát líc. Testujme hypotézu, že rub i líc padá se stejnou pravděpodobností.

Řešení. Označme p pravděpodobnost, s níž padá líc. Testujeme hypotézu $H_0 : p = \frac{1}{2}$ proti alternativě $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$. Celkový počet hodů je $n = 100$, z toho bylo zaznamenáno $X = 62$ líců. Tudíž $U = 2,40$. Jelikož $|U| \geq 1,96 = u(0,025)$, testovaná hypotéza se zamítá na hladině významnosti $\alpha = 0,05$. (Porovnejte tento výsledek s výsledkem příkladu 6.)

Úloha 1.

- Dvanáct studentů lesnické fakulty zašlo do bufetu na pivo. Osmi z nich bylo natočeno pivo pod míru, zbývajícím čtyřem nad míru. Znamená to, že výčepní na pivo systematicky šetří?
- Řešte tutéž úlohu na základě celoměsíčního průzkumu, kdy z 1250 piv bylo natočeno 650 nad míru a 600 pod míru.

Přibližný vzorec pro intervalový odhad parametru p binomického rozdělení

Předpokládejme, že náhodná veličina X má rozdělení $Bi(n, p)$. Veličina

$$(*) \quad \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

má pak pro $n \rightarrow \infty$ asymptoticky rozdělení $N(0, 1)$. Lze ukázat, že tutéž vlastnost má i veličina

$$\frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{\frac{X}{n} \left(1 - \frac{X}{n}\right)}{n}}},$$

kteřou obdržíme modifikací veličiny (*) tak, že parametr p ve výrazu pod odmocninou nahradíme jeho konzistentním odhadem X/n . To znamená, že pro velké hodnoty parametru n s pravděpodobností přibližně rovnou $1 - \alpha$ platí:

$$-u(\alpha/2) < \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{\frac{X}{n} \left(1 - \frac{X}{n}\right)}{n}}} < u(\alpha/2).$$

Jinak vyjádřeno, s pravděpodobností přibližně rovnou $1 - \alpha$ je

$$\left| \frac{X}{n} - p \right| < u(\alpha/2) \cdot \sqrt{\frac{\frac{X}{n} \left(1 - \frac{X}{n}\right)}{n}}.$$

Odtud pak vyvodíme následující závěr.

Věta 2.

(1) *Interval*

$$\frac{X}{n} \pm u(\alpha/2) \sqrt{\frac{\frac{X}{n} \left(1 - \frac{X}{n}\right)}{n}}$$

pokrývá hodnotu parametru p s pravděpodobností přibližně rovnou $1 - \alpha$.

(2) *Interval $(D, 1)$, kde*

$$D = \frac{X}{n} - u(\alpha) \sqrt{\frac{\frac{X}{n} \left(1 - \frac{X}{n}\right)}{n}},$$

a rovněž tak interval $(0, H)$, kde

$$H = \frac{X}{n} + u(\alpha) \sqrt{\frac{\frac{X}{n} \left(1 - \frac{X}{n}\right)}{n}},$$

pokrývá hodnotu parametru p s pravděpodobností přibližně rovnou $1 - \alpha$.

Důsledek. Je-li číslo n hodně veliké, pak interval

$$\frac{X}{n} \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$

pokrývá hodnotu parametru p s pravděpodobností alespoň 0,95.

Důkaz. Stačí si uvědomit, že kritická hodnota $u(0,025)$ je přibližně rovna dvěma a že výraz

$$\frac{X}{n} \left(1 - \frac{X}{n}\right)$$

nenabude nikdy hodnoty větší než $1/4$. $\square$

Příklad 11. Označme p pravděpodobnost, s níž při hodu danou hrací kostkou padá šestka. Při sto dvaceti hodech touto kostkou padla šestka právě třicetkrát. Chceme odhadnout hodnotu parametru p .

Řešení. Celkový počet hodů je $n = 120$, z toho bylo zaznamenáno $X = 30$ šestek. Bodovým odhadem parametru p je tedy číslo $30/120 = 0,25$, zatímco přibližný 95% interval spolehlivosti pro tento parametr je

$$0,25 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,25 \cdot (1 - 0,25)}{120}},$$

tj. $0,25 \pm 0,08$ neboli $(0,17; 0,33)$.

Úloha 2. Klíčivost semen definujeme jako pravděpodobnost p , že semeno vyklíčí. Z náhodně vybraného množství jednoho tisíce semen jich vyklíčilo osm set. Určete 95% interval spolehlivosti pro klíčivost.

Výsledek: $0,8 \pm 0,025$

Příklad 12. Označme p pravděpodobnost, s níž při hodu danou hrací kostkou padá šestka. Provedeme n hodů; počet hodů, při nichž padne šestka, označme X . Ptáme se, jak veliký musí být počet hodů n , aby chyba odhadu parametru p veličinou X/n nepřevýšila s pravděpodobností alespoň 95% hodnotu 0,01?

Řešení. Číslo n bude muset být zajiště velmi velké. V takovém případě má veličina

$$\frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

rozdělení $N(0, 1)$, což znamená, že s pravděpodobností o něco málo větší než 0,95 je

$$\left| \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \right| < 2.$$

Jelikož však výraz $p(1-p)$ nenabude nikdy hodnoty větší než $\frac{1}{4}$, je s alespoň 95% pravděpodobností

$$\left| \frac{X}{n} - p \right| < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Podmínka úlohy je proto splněna pokud $1/\sqrt{n} \leq 0,01$ (srovnej s důsledkem za větou 3). Odtud plyne, že $n \geq 10\,000$.

Příklad 13 (průzkum veřejného mínění). Z dvanácti set náhodně vybraných respondentů se jich tři sta vyslovilo pro legalizaci marihuany. Úkolem je odhadnout se spolehlivostí 95%, jaká část dotazované populace si přeje legalizaci marihuany.

Řešení. Nechť p je pravděpodobnost, že respondent náhodně vybraný z dotazované populace je pro legalizaci marihuany. Tato pravděpodobnost je zřejmě totožná s relativní četností těch osob (v populaci), kteří si legalizaci přejí. Označme $n = 1200$ počet všech respondentů a X počet těch z nich, kteří jsou pro legalizaci. Předpokládejme, že počet respondentů je relativně velmi malý vzhledem k velikosti zkoumané populace a že respondenti byli vybráni zcela náhodně. Pak $X \sim Bi(n, p)$, neboť při postupném vybírání respondentů zůstává ve zbytku zkoumané populace relativní četnost těch, kteří jsou pro legalizaci prakticky nezměněna. Na druhou stranu je počet respondentů dost veliký na to, aby

bylo možno rozdělení $Bi(n, p)$ nahradit rozdělením normálním a pro odhad parametru p užít asymptotického vzorce

$$\frac{X}{n} \pm u(\alpha/2) \sqrt{\frac{\frac{X}{n} \left(1 - \frac{X}{n}\right)}{n}}.$$

Dosazením $n = 1200$, $X = 300$, $\alpha = 0,05$ obdržíme pro relativní četnost osob, kteří si přejí legalizaci, odhad $0,25 \pm 0,025$.

Úloha 3 (odhad relativní četnosti nemocných stromů v porostu). Odhadněte relativní četnost nemocných stromů v porostu na základě náhodného výběru dvou set stromů, jestliže v tomto výběru bylo zaznamenáno právě devadesát nemocných stromů.

Výsledek: $0,45 \pm 0,07$