

Úvodní rozcvička

1. Pravděpodobnost, že jedinec z jisté populace se dožije šedesáti let, je 0,8; pravděpodobnost, že se dožije sedmdesáti let, je 0,5. Jaká je pravděpodobnost, že jedinec zemře mezi šedesátým a sedmdesátým rokem svého života?
2. O náhodných jevech A a B jsou známy následující skutečnosti:
 - (1) Pravděpodobnost, že nastane alespoň jeden z jevů A a B , je $3/4$.
 - (2) Pravděpodobnost, že oba jevy A a B nastanou současně, je $1/4$.
 - (3) Pravděpodobnost, že nenastane jev A , je $2/3$.Určete pravděpodobnosti obou jevů A a B . Jaká je pravděpodobnost, že nastane jev A a přitom nenastane jev B ?

Klasická pravděpodobnost

1. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu šesti hracími kostkami
 - a) padnou vzájemně různá čísla,
 - b) padnou pouze lichá čísla?*Výsledek:* a) asi 0,015432, b) 0,015625
2. Na šachovnici se náhodně rozmístí osm věží. Jaká je pravděpodobnost, že žádná z věží neohrožuje žádnou z ostatních (tj. žádné dvě věže neleží ve stejné řadě či sloupci)?
3. Snažíme se potmě otevřít dveře svého bytu. V kapse máme deset klíčů, z toho právě jeden je od bytu. Náhodně tedy vybíráme a zkoušíme jeden klíč po druhém. Narazíme-li na klíč, který není od bytu, přendáme jej do druhé kapsy, čímž zajistíme, že žádný klíč nebude vybírán a zkoušen opakovaně.
 - a) Jaká je pravděpodobnost, že nám správný klíč padne do ruky při k -tém pokusu?
 - b) Jaká je pravděpodobnost, že nám správný klíč padne do ruky nejpozději při k -tém pokusu?
4. **Pokračování úlohy 3.** Druhý den se opět snažíme otevřít potmě dveře svého bytu. V kapse máme deset klíčů, z toho právě dva jsou od bytu. (Po zkušenostech z předchozího dne, kdy nám otevírání bytu trvalo příliš dlouho, jsme si totiž do kapsy vložili ještě jeden klíč od bytu navíc a dále jsme z kapsy jeden nepříliš používaný klíč vyndali.) Znovu, tak jako předchozího dne, náhodně vybíráme a poté zkoušíme jeden klíč po druhém a již vyzkoušené klíče přendáváme do druhé kapsy.
 - a) Jaká je pravděpodobnost, že při k -tém pokusu nám padne do ruky správný klíč?
 - b) Jaká je pravděpodobnost, že správný klíč nám padne do ruky poprvé při k -tém pokusu?
 - c) Jaká je pravděpodobnost, že správný klíč nám padne do ruky nejpozději při k -tém pokusu?*Výsledek:* b) Označme p_k pravděpodobnost, že správný klíč nám padne do ruky poprvé při k -tém pokusu. Seznam pravděpodobností p_k je v následující tabulce:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_k	0,200	0,178	0,156	0,133	0,111	0,089	0,067	0,044	0,022	0

- c) Označme p_k pravděpodobnost, že správný klíč nám padne do ruky nejpozději při k -tém pokusu. Seznam pravděpodobností p_k je v následující tabulce:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_k	0,200	0,378	0,533	0,667	0,778	0,867	0,933	0,978	1	1

5. **Náhodný výběr bez vracení.** V osudí je N koulí, z toho M černých a $N - M$ bílých. Koule postupně ve zcela náhodném pořadí vytahujeme z osudí, přičemž je nevracíme zpět.
- Jaká je pravděpodobnost, že k -tá vytažená koule je černá?
 - Jaká je pravděpodobnost, že černou kouli vytáhneme poprvé při k -tém tahu?
 - Jaká je pravděpodobnost, že černou kouli vytáhneme nejpozději při k -tém tahu?
 - Jaká je pravděpodobnost, že po n tazích bude vytaženo právě k černých koulí?
 - *) Je-li celkový počet koulí v osudí hodně veliký, lze pravděpodobnosti z úloh b), c) a d) vyjádřit jako funkci poměru $p = M/N$. Najděte taková vyjádření.

6. Z balíčku mariášových karet vytáhneme postupně osm karet; nevracíme je přitom zpět. Jaká je pravděpodobnost, že právě tři vytažené karty mají červenou barvu?

Výsledek: 0,23

7. **Náhodný výběr s vracením.** V osudí je N koulí, z toho M černých a $N - M$ bílých. Náhodně vytáhneme jednu kouli, poté ji vrátíme zpět a koule v osudí důkladně promícháme. Opět vytáhneme kouli, vrátíme ji zpět, koule v osudí promícháme atd. V principu lze výběr koule nesčíslněkrát opakovat.

- Jaká je pravděpodobnost, že při k -tém tahu vytáhneme černou kouli?
- Jaká je pravděpodobnost, že černou kouli vytáhneme poprvé při k -tém tahu?
- Jaká je pravděpodobnost, že černou kouli vytáhneme nejpozději při k -tém tahu?
- Jaká je pravděpodobnost, že v n tazích bude černá koule vytažena právě k -krát?

8. Házíme opakovaně hrací kostkou. Předpokládejme, že výsledek žádného z hodů nezávisí na výsledcích předchozích hodů a že šestka padá s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. Jaká je pravděpodobnost, že

- šestka padne poprvé při desátém hodu,
- šestka padne nejpozději při desátém hodu,
- výskytu šestky se nikdy nedočkáme?

Výsledek: a) Označme p_k pravděpodobnost, že šestka padne poprvé při k -tém hodu. Část (nekonečného) seznamu pravděpodobností p_k je v následující tabulce:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_k	0,167	0,139	0,116	0,096	0,080	0,067	0,056	0,047	0,039	0,032

- b) Označme p_k pravděpodobnost, že šestka padne nejpozději při k -tém hodu. Část seznamu pravděpodobností p_k je v následující tabulce:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_k	0,167	0,306	0,421	0,518	0,598	0,665	0,721	0,767	0,806	0,838

9. Jaká je pravděpodobnost, že při deseti poctivých hodech poctivou hrací kostkou

- padnou samé šestky,
- nepadne ani jedna šestka,
- padne alespoň jedna šestka,
- padnou právě tři šestky?

Jaký počet šestek je v sérii deseti hodů nejvíce pravděpodobný?

Výsledek: Označme p_k pravděpodobnost, že v sérii deseti hodů padne právě k šestek. Seznam pravděpodobností p_k je v následující tabulce:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_k	0,162	0,323	0,291	0,155	0,054	0,013	0,002	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-8}$

10. Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině n lidí se najdou alespoň dva, kteří mají narozeniny ve stejný den? (Předpokládáme, že rok má 365 dní a že porodnost se v průběhu roku nemění.) Speciálně určete tuto pravděpodobnost pro $n = 23$ a pro $n = 56$.

Výsledek: Pro $n = 23$ vyjde asi 0,5 a pro $n = 56$ dostaneme zhruba 0,99.

11. Součet výsledků hodu několika hracími kostkami.

a) Hodíme dvěma hracími kostkami (případně dvakrát po sobě jednou a tou samou hrací kostkou) a jednotlivé výsledky sečteme. Předpokládáme přitom, že jde o poctivé hody poctivými hracími kostkami. Označme p_k pravděpodobnost, že součet výsledků je roven k . Úkolem je vypočítat pravděpodobnosti p_k pro libovolné k .

b*) Pokuste se řešit úlohu a) pro hod třemi a více kostkami.

c) Řešte úlohu a) pro hod šestistěnnou a dvanáctistěnnou kostkou.

Geometrická pravděpodobnost

1. Stisknutím jisté klávesy na kalkulačce lze spustit program, nazývaný generátor náhodných čísel, o kterém se traduje, že vybírá zcela náhodně číslo z intervalu $(0, 1)$. S jakou pravděpodobností bude tímto generátorem vybráno číslo 0,5? S jakou pravděpodobností bude takové číslo vybráno nejpozději na pětistý pokus?
- 2*. Reálné číslo bylo vybráno zcela náhodně z intervalu $(0, 1)$. Jaká je pravděpodobnost, že trojkový rozvoj tohoto čísla neobsahuje cifru jedna?
- 3*. Reálné číslo bylo vybráno zcela náhodně z intervalu $(0, 1)$. Jaká je pravděpodobnost, že toto číslo
 - a) má konečný desetinný rozvoj,
 - b) je racionální,
 - c) je algebraické?
4. Určitým místem projíždí autobusy městské hromadné dopravy, a to střídavě v patnácti- a dvacetiminutových intervalech. Přijdeme-li v náhodném časovém okamžiku na zastávku, jaká je pravděpodobnost, že budeme na nejbližší spoj čekat nejvýše deset minut?
5. V pětischoďovém domě je výškový rozdíl mezi jednotlivými patry šest metrů, mezi přízemím a prvním patrem osm metrů. Pro poruchu zůstane výtah někde stát. Výška dveří výtahu je 1,8 metru. Jaká je pravděpodobnost, že v okamžiku zastavení bude z výtahu vidět jen stěnu šachty? (Předpokládáme, že jde o starý typ výtahu, jehož dveře jsou celé prosklené a vnitřní dveře neexistují, případně o výtah typu „páter noster“, tj. bez dveří).

Výsledek: 0,4375

- 6*. Matematické kyvadlo se kývá bez útlumu. Úhel největší výchylky je 2° . Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně zvoleném okamžiku bude výchylka větší než 1° ?

7. Jaká je pravděpodobnost, že součet dvou čísel vybraných zcela náhodně (a nezávisle na sobě) z intervalu $(0, 1)$ je větší než $\frac{1}{2}$ a současně menší než $\frac{3}{2}$?

Výsledek: $\frac{3}{4}$