Rozdělení diskrétních náhodných veličin

1. Nechť X je diskrétní náhodná veličina s rozdělením pravděpodobností daným následující tabulkou:

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	0,15	0,18	0,13	0,16	0,16	0,22

Ověřte, že jde vskutku o rozdělení pravděpodobností a určete modus, medián, střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku veličiny X.

Výsledek: $E(X) = 3{,}66$; $D(X) \doteq 3{,}12$; $\sigma(X) \doteq 1{,}77$

2. Dokažte, že je-li X diskrétní náhodná veličina nabývající hodnot $x_1, x_2, \dots$ s pravděpodobnostmi $p_1, p_2, \dots$, pak

$$D(X) = \sum_i p_i x_i^2 - E^2(X) .$$

3. Dokažte, že střední hodnota diskrétní náhodné veličiny má význam fyzikálního těžiště.

4. Nechť X je diskrétní náhodná veličina s rozdělením pravděpodobností daným následující tabulkou:

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	0,05	0,15	0,30	0,30	0,15	0,05

Ověřte, že jde vskutku o rozdělení pravděpodobností a určete modus, medián, střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku veličiny X.

Výsledek: $D(X) = 1{,}45$; $\sigma(X) \doteq 1{,}20$

5. a) Určete střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku výsledku poctivého hodu poctivou hrací kostkou (a to šestistěnnou a dvanáctistěnnou).

b) Nechť X je číslo vybrané zcela náhodně z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X se nazývá *rovnoměrné diskrétní rozdělení* a značí se $R\{1, 2, \dots, n\}$. Určete střední hodnotu a rozptyl tohoto rozdělení.

Poznámka. Hodnotu veličiny X s rozdělením $R\{1, 2, \dots, n\}$ lze pro některé hodnoty parametru n generovat poctivým hodem poctivou hrací kostkou s příslušným počtem stěn. Univerzální postup generování hodnot veličiny X spočívá v tom, že z osudí, ve kterém je n koulí, očíslovaných čísly $1, 2, \dots, n$, vytáhneme zcela náhodně jednu kouli. Analogickou službu poskytuje tzv. *diskrétní generátor náhodných čísel* implementovaný na počítači.

c) Popište rozdělení součtu výsledků simultánního hodu dvěma běžnými hracími kostkami a určete jeho modus, medián, střední hodnotu a rozptyl.

d) Popište rozdělení součtu výsledků simultánního hodu šestistěnnou a dvanáctistěnnou hrací kostkou a určete jeho modus, medián, střední hodnotu a rozptyl.

Výsledek:

b) $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$, $E(X^2) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$, $D(X) = \dfrac{(n-1)(n+1)}{12}$

6. a) Vaším úkolem je vyrobit zařízení generující náhodná čísla 1, 2 a 3, a to číslo 1 s pravděpodobností $1/3$, číslo 2 s pravděpodobností $1/5$ a číslo 3 s pravděpodobností $7/15$. K dispozici máte osudí s dostatečným množstvím koulí, které si můžete libovolným způsobem označit (barvami, přirozenými čísly apod.). Koule lze z osudí zcela náhodně vytahovat; předpokládáme přitom, že pro všechny koule je pravděpodobnost jejich vytažení stejná a že po opětovném vložení vytažené koule do osudí a důkladném promíchání koulí lze zcela náhodný výběr koule vždy zopakovat.

b) Lze s použitím výše popsaných pomůcek simulovat libovolné diskrétní rozdělení?

7. V osudí je dvacet pět míčků označených číslicemi 1, 2 a 3. Pět míčků je označeno číslicí 1, deset míčků číslicí 2 a deset míčků číslicí 3. Majitel osudí vám nabízí účast v následující hře. Vytáhnete náhodně míček z osudí. V případě, že míček je označen číslicí 1, vyhráváte jednu korunu. V případě, že míček je označen číslicí 2, vyhráváte dvě koruny. Je-li však míček označen číslicí 3, prohráváte tři koruny. Je hra z dlouhodobého hlediska výhodná pro hráče nebo pro provozovatele?

Výsledek: Hra je dlouhodobě výhodnější pro provozovatele.

8. Tři dorostenci kopou po jednom pokutovém kopu. První bude úspěšný s pravděpodobností 0,8, druhý s pravděpodobností 0,7 a třetí s pravděpodobností 0,9. Určete rozdělení pravděpodobností celkového počtu vstřelených branek a jeho střední hodnotu.

Výsledek:

Počet branek	0	1	2	3
Pravděpodobnost	0,006	0,092	0,398	0,504

Střední počet vstřelených branek je 2,4.

9. Student Plíva střílí do terče, přičemž má k dispozici neomezený počet nábojů. Pravděpodobnost zásahu je při každém výstřelu stejná, a to $p = 0{,}9$. Plíva střílí pouze do té chvíle, než poprvé zasáhne terč, pak střelbu ukončí. Označme X počet výstřelů. Popište rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X a určete jeho modus a střední hodnotu.

Výsledek: $\hat{x} = E(X) = 1$

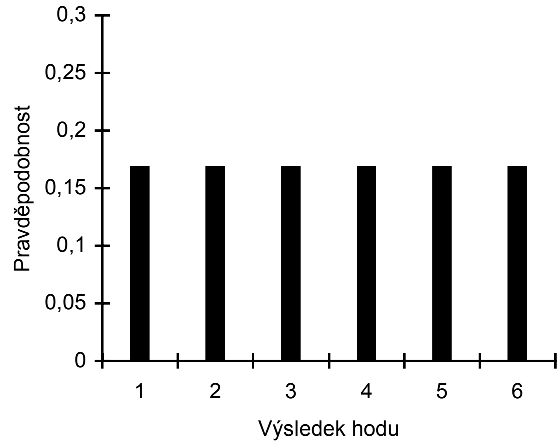
10. Snažíme se potmě otevřít dveře svého bytu. V kapse máme deset klíčů, z toho právě jeden je od bytu. Náhodně tedy vybíráme a zkoušíme jeden klíč po druhém. Narazíme-li na klíč, který není od bytu, přendáme jej do druhé kapsy, čímž zajistíme, že žádný klíč nebude vybírán a zkoušen opakovaně.

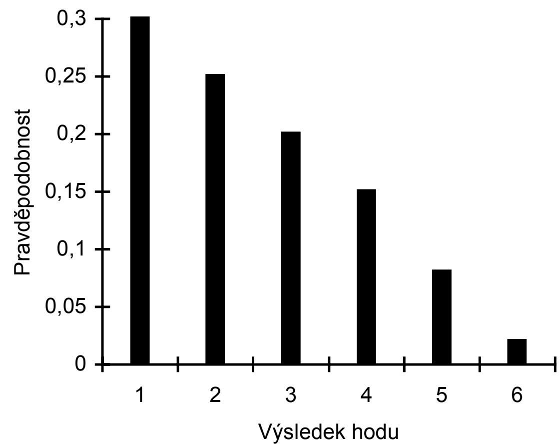
a) Určete střední počet klíčů potřebných k otevření bytu.

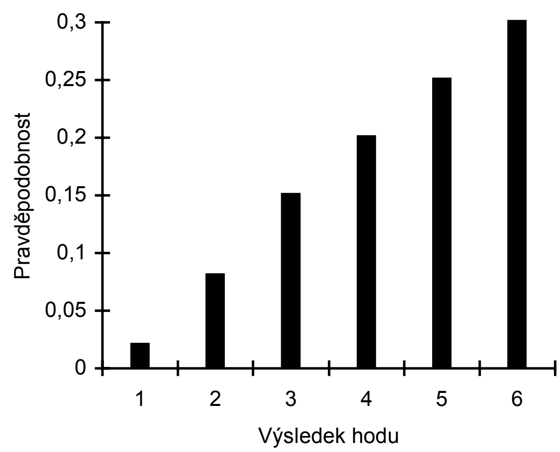
b) Jak se změní řešení úlohy a), jestliže klíč vždy vrátíme do té kapsy, z níž jsme jej vyndali, a tudíž každý klíč vybíráme zcela náhodně ze stále stejné sady klíčů?

c) Jak se změní řešení úlohy a), jestliže právě dva z klíčů jsou od bytu?

11a. Každý z následujících tří diagramů znázorňuje rozdělení pravděpodobností výsledku hodu hrací kostkou. Jednotlivé diagramy přitom odpovídají různým hracím kostkám (s nerovnoměrně rozloženou hmotou). Pro kterou z kostek má modus, medián a střední hodnota výsledku nejmenší, resp. největší hodnotu?







11b. Každý z následujících tří diagramů znázorňuje rozdělení pravděpodobností výsledku hodu hrací kostkou. Jednotlivé diagramy přitom odpovídají různým hracím kostkám (s nerovnoměrně rozloženou hmotou). Pro kterou z kostek má rozptyl výsledku nejmenší, resp. největší hodnotu?