

DISKRÉTNÍ NÁHODNÉ VELIČINY (II)

1. Jaká je pravděpodobnost, že při deseti poctivých hodech poctivou hrací kostkou

- a) padnou samé šestky,
- b) nepadne ani jedna šestka,
- c) padne alespoň jedna šestka,
- d) padnou právě tři šestky?

Jaký počet šestek je v sérii deseti hodů nejvíce pravděpodobný?

2. Klíčivost semen je 80%. Zasejeme deset semen.

- a) Jaká je pravděpodobnost, že vyklíčí právě sedm semen?
- b) Jaká je pravděpodobnost, že vyklíčí alespoň sedm semen?
- c) Jaký počet vyklíčených semen je nejvíce pravděpodobný?

Výsledek: Označme p_k pravděpodobnost, že vyklíčí právě k semen. Seznam pravděpodobností p_k je v následující tabulce:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = k)$	$1 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-4}$	0,006	0,026	0,088	0,201	0,302	0,268	0,107

3. Dejme tomu, že čtvrtina dospělých občanů v dané zemi je pro legalizaci kouření marihuany. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybraném vzorku dvaceti dospělých jedinců je jich alespoň pět pro legalizaci?

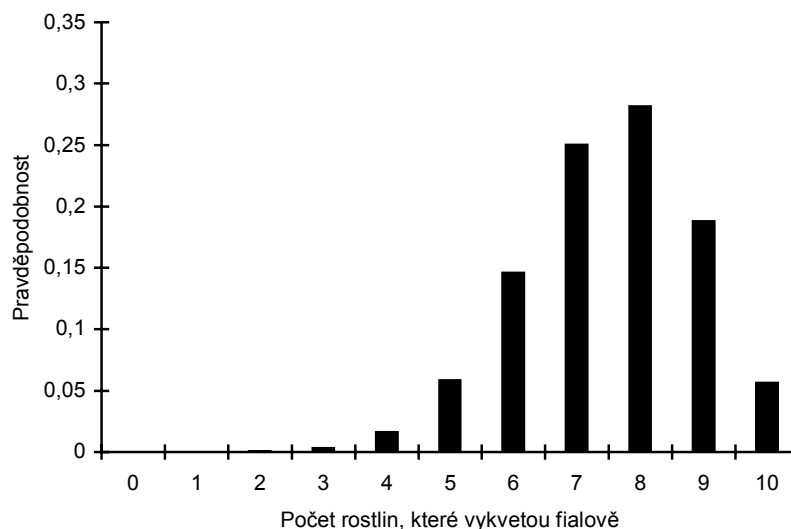
Výsledek: 0,59

4. Dejme tomu, že třicet procent stromů v porostu je napadených červenou hnilobou. Vybereme náhodně sto stromů. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň dvacet z nich je napadených?

Výsledek: 0,99

5. Pěstujeme hrách s bílými a fialovými květy. Věříme v platnost Mendelových zákonů a předpokládáme tudíž, že rostlina vykvetě fialově s pravděpodobností $\frac{3}{4}$. Jaká je pravděpodobnost, že z deseti rostlin jich právě k vykvetě fialově? Jaký počet fialově vykvetlých rostlin je nejvíce pravděpodobný?

Výsledek:

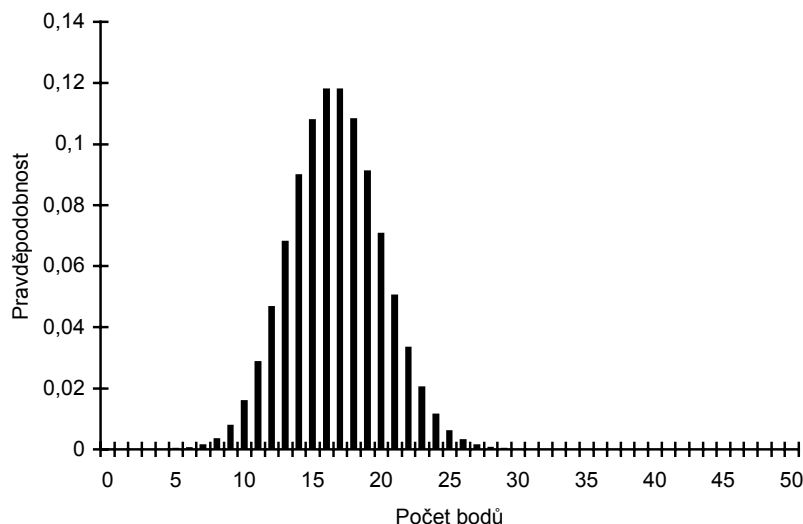


6. Při přijímacích zkouškách na lesnickou fakultu psali studenti test z biologie s padesáti otázkami. U každé otázky byly uvedeny tři možné odpovědi, z toho právě jedna správná. Za každou správnou odpověď získal student jeden bod (bylo tedy možno získat nejvýše padesát bodů). Jestliže student získal méně než deset bodů, nebyl doporučen ke studiu. Předpokládejme, že student se na zkoušku vůbec nepřipravil, a volil proto odpovědi zcela náhodně.

a) Jaký počet získaných bodů je při tomto postupu nejvíce pravděpodobný?

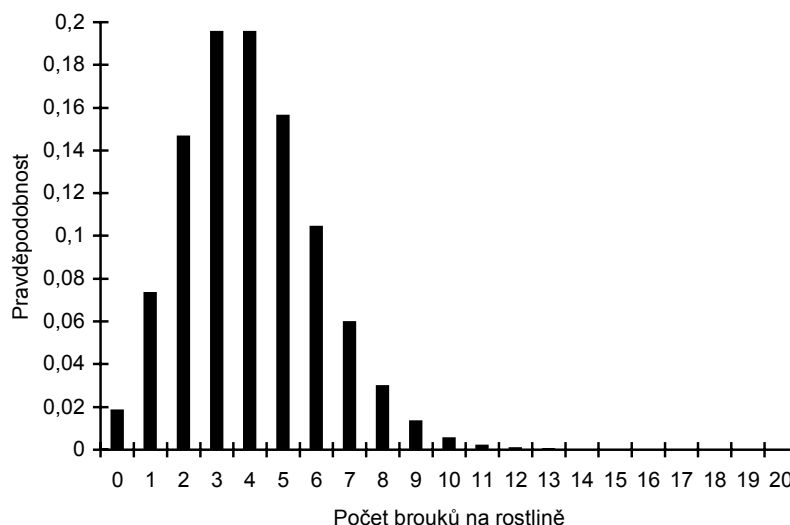
b) Jaká je pravděpodobnost, že student při psaní testu uspěl (tj. získal alespoň deset bodů)?

Výsledek: a) 16 a 17, b) 0,99.



7. Deset tisíc brouků se zcela náhodně rozmístí na dvou a půl tisíci rostlin. Popište rozdělení pravděpodobností počtu brouků na rostlině a znázorněte je graficky. (Předpokládáme, že rostliny jsou stejně veliké.)

Výsledek:



8. Dvě stě našich spoluobčanů bezdomovců se zcela náhodně rozmístilo (a poté usadilo) na homogenním stanovišti o rozloze deset čtverečních kilometrů. Uvnitř tohoto stanoviště je desetihektarový pozemek patřící jiné naší spoluobčance Zuzce H. S jakou pravděpodobností osídlili Zuzčino území alespoň tři bezdomovci?

Výsledek: 0,32

9. Tisíc turistů vyrazilo na dvacet kilometrů dlouhou túru. Každý z nich dostal na cestu od pořadatelů po jednom jogurtu. Během túry odhodili turisté všechny kelímky od jogurtů podél cesty. Sto metrů dlouhý úsek cesty vede územím kmene Apačů. Každého turistu, který na jejich území odhodí kelímek, Apačové skalpují. Jestliže předpokládáme, že turisté odhazují kelímky v průběhu túry zcela náhodně, jaká je pravděpodobnost, že alespoň dva z nich přijdou o skalp?
Výsledek: 0,96
10. Brouci jsou zcela náhodně rozmístěni na rostlinách s intenzitou (denzitou) 4,2 brouka na jednu rostlinu. Jaký počet brouků na rostlině je nejvíce pravděpodobný? Určete tuto pravděpodobnost. (Předpokládáme, že rostliny jsou stejně veliké.)
11. Rostliny jsou na dané lokalitě rozmístěny zcela náhodně s intenzitou jedna rostlina na metr čtvereční. Jaký počet rostlin v náhodně vybraném kruhu o průměru jeden metr je nejvíce pravděpodobný?
Výsledek: 0
12. Louka je rozdělena na devět set stejně velkých čtverců. Dvě stě dvacet jeden z těchto čtverců přitom neobsahuje žádnou sedmikrásku. Předpokládejte, že sedmikrásky jsou na louce rozmístěny zcela náhodně a opírajíce se o tento předpoklad odhadněte počet sedmikrásek na louce.
Výsledek: 1264
- 13*. Brouci jsou rozmístěni zcela náhodně na (stejně velikých) rostlinách s intenzitou čtyři brouci na rostlinu. S jakou pravděpodobností se na rostlině nachází lichý (resp. sudý) počet brouků?
Výsledek: 0,49983 (resp. 0,50017)
14. Předpokládejme, že během léta uhynou z dané věkové třídy určité populace v průměru tři jedinci denně, přičemž úmrtnost je během celého léta stejná. Označme X počet jedinců, kteří uhynou během jednoho dne.
a) Popište rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X a určete jeho modus.
b) Jaká je pravděpodobnost, že během jednoho dne uhynie nejvýše jeden jedinec?
Řešení. a) Předpokládejme, že zvolená časová jednotka (den) je velmi malá ve srovnání se střední délkou života jedince. Rozdělení pravděpodobností veličiny X je potom Poissonovo s parametrem $\lambda = 3$. (Parametr λ má v daném kontextu význam intenzity umírání neboli *mortality*.) Nejvíce pravděpodobný je úhyn dvou nebo tří jedinců za den.
b) 0,20
15. Házíme opakovaně hrací kostkou. Předpokládejme, že výsledek žádného z hodů nezávisí na výsledcích předchozích hodů a že šestka padá s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. Jaká je pravděpodobnost, že
a) šestka padne poprvé při desátém hodu,
b) šestka padne nejpozději při desátém hodu,
c) výskytu šestky se nikdy nedočkáme?
- 16*. Student Plíva střílí do terče, přičemž má k dispozici neomezený počet nábojů. Předpokládejme, že pravděpodobnost zásahu nezávisí na předchozím průběhu střelby a je při každém výstřelu stejná; označme tuto pravděpodobnost p . Konkrétně necht' $p = 0,5$.
a) Označme X počet výstřelů předcházejících prvnímu zásahu. Popište rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X a určete jeho modus a střední hodnotu.
b) Plíva vystřelí desetkrát. Jaká je pravděpodobnost, že se trefí alespoň třikrát?
c) Kolik ran si Plíva musí zakoupit, aby měl alespoň s 99% pravděpodobností zaručeno, že po jejich vystřelení bude mít na svém kontě minimálně tři zásahy?

Návod k řešení úlohy c): Označte X počet neúspěšných výstřelů předcházejících třetímu zásahu a určete rozdělení pravděpodobností veličiny X . K vyřešení naší úlohy stačí vyčíslit dostatečně velkou část tohoto rozdělení.

Výsledek: a) $\hat{x} = 0$, $E(X) = 1$, b) 0,95,

c)

$$p_k = P(X = k) = \binom{-3}{k} 0,5^3 (-0,5)^k,$$

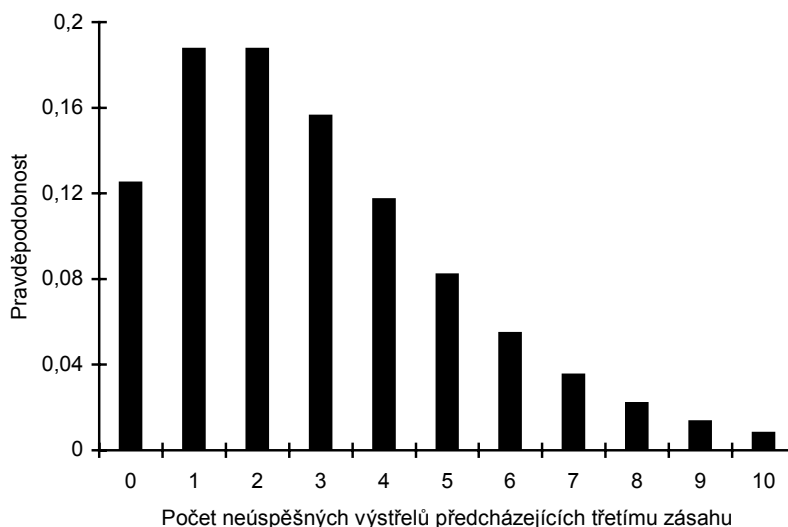
$$p_0 = 0,5^3,$$

$$p_{k+1} = 0,5 \cdot \frac{k+3}{k+1} p_k.$$

Pro $k = 0, 1, \dots, 10$ jsou pravděpodobnosti p_k zaznamenány v následující tabulce:

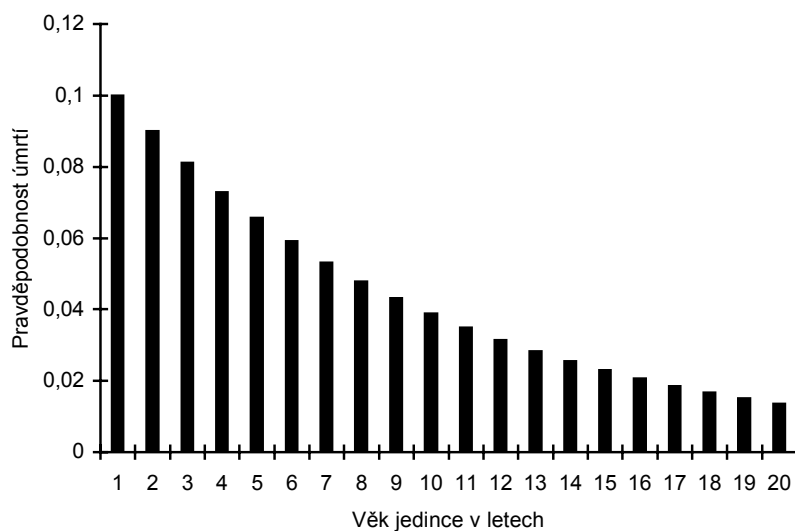
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = k)$	0,125	0,188	0,188	0,156	0,117	0,082	0,055	0,035	0,022	0,013	0,008

Z tabulky vyplývá, že $P(X \leq 10) \doteq 0,99$. Jinak řečeno, s pravděpodobností 0,99 bude počet neúspěšných výstřelů předcházejících třetímu zásahu roven nejvýše deseti. Minimální počet výstřelů, které musí Plíva učinit, aby zasáhl terč s pravděpodobností alespoň 0,99 alespoň třikrát, je tedy roven třinácti. (Při výpočtu ovšem došlo k ne zcela zanedbatelným zaokrouhlovacím chybám; kdybychom počítali opravdu přesně, shledali bychom, že počet zakoupených ran je třeba zvýšit na čtrnáct.)



- 17*. Přežívání jedinců v populaci s mortalitou nezávislou na věku.** Uvažme populaci jedinců s mortalitou nezávislou na věku. Nechť p je pravděpodobnost, že žijící jedinec do roka zemře. Tato pravděpodobnost je kvantitativním vyjádřením mortality a dle našeho předpokladu nezávisí na věku jedince. Označme X délku života jedince v letech. Přesněji, řekneme, že $X = k$, kde $k = 1, 2, \dots$, jestliže jedinec zemře v k -tém roce svého věku. Určete rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X a střední délku života jedince příslušejícího dané populaci.

Výsledek: Střední délka života jedince je $1/p$. Speciálně, nechť $p = 0,1$. Střední délka života jedince ve zkoumané populaci je pak deset let. Rozdělení pravděpodobností veličiny X je pro $p = 0,1$ znázorněno graficky na následujícím obrázku. Všimněte si, že medián tohoto rozdělení je roven sedmi. Jestliže je tedy zkoumaná populace dostatečně početná, pak více než polovina jedinců se dožije šesti let. Na druhou stranu však více než polovina se jich nedožije sedmi let.



18. Za pomoci tabulkového kalkulátoru vyčíslete následující binomická rozdělení:

a) $Bi(10000; 0,0005)$,

b) $Bi(20, \frac{1}{6})$,

c) $Bi(100, \frac{1}{2})$.

S jakou přesností lze tato rozdělení aproximovat rozdělením Poissonovým? Výsledky znázorněte pomocí tyčkových diagramů.

(Při výpočtu pravděpodobností využijte rekurentní formule.)

Výsledek:

