

Normální rozdělení

1. Laplaceův integrál. Platí

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Důkaz. Vypočteme první z obou integrálů (druhý pak lehce obdržíme z prvního substitucí $x/\sqrt{2} = y$). Použijeme přitom triku spočívajícího v tom, že namísto integrálu

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

vypočítáme nejprve integrál

$$(*) \quad \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Poté použijeme Fubiniovu větu, podle které je

$$(**) \quad \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \left[\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right]^2.$$

K výpočtu integrálu (*) použijeme substituci

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi,$$

kde $r > 0$, $0 < \varphi < \pi/2$. Jinak řečeno kartézské souřadnice x, y nahradíme polárními souřadnicemi r, φ . Transformace

$$(r, \varphi) \mapsto (x, y)$$

je prosté regulární zobrazení s jakobiánem

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Přitom $x^2 + y^2 = r^2$. Dle věty o substituci

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \right) d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr.$$

Substituce $r^2 = t$ dále dává

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Z formule (**) nyní vyplývá, že

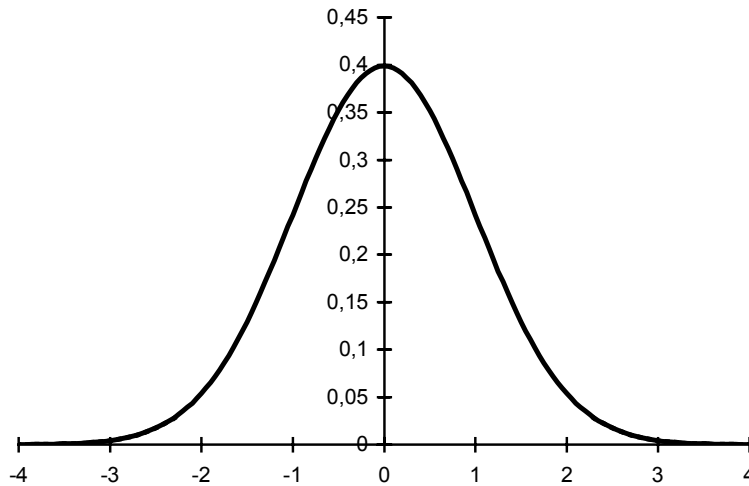
$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

což bylo dokázat. $\square$

2. Definice. Normovaným normálním rozdělením nazýváme spojité rozdělení s hustotou

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

pro $-\infty < x < \infty$. Toto rozdělení značíme $N(0, 1)$ a skutečnost, že veličina X má rozdělení $N(0, 1)$ vyjadřujeme zápisem $X \sim N(0, 1)$.



Hustota normovaného normálního rozdělení

3. Poznámka. Funkce $\varphi(x)$ má právě dva inflexní body, a to ± 1 .

4. Pozorování. Necht' $X \sim N(0, 1)$. Pak $\hat{x} = \tilde{x} = 0$.

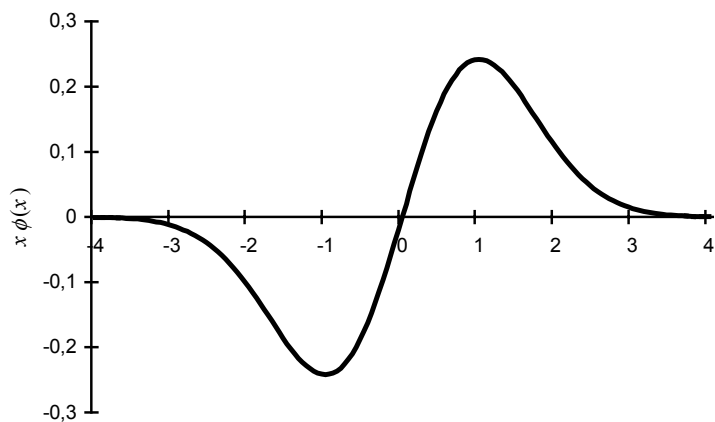
5. Tvzení. Necht' $X \sim N(0, 1)$. Pak $E(X) = 0$ a $D(X) = 1$.

Důkaz. Jest

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx.$$

Funkce $x\varphi(x)$ je lichá a tudíž

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x f(x) dx + \int_{-\infty}^0 x f(x) dx = \int_0^{\infty} x f(x) dx - \int_0^{\infty} x f(x) dx = 0.$$

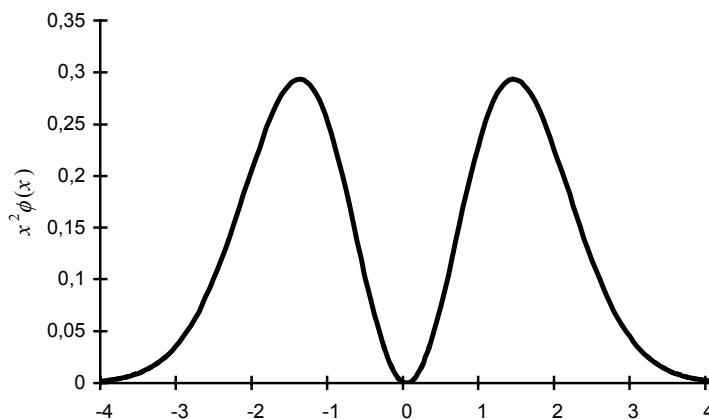


Je však třeba ukázat, že integrál $\int_0^{\infty} x\varphi(x)dx$ je konečný. Za tím účelem použijeme substituci $-x^2/2 = y$, která dává

$$\int_0^{\infty} x\varphi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} xe^{-x^2/2}dx = \int_{-\infty}^0 e^{-y}dy = 1.$$

Vypočtěme nyní druhý obecný moment $E(X^2)$. Je

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}dx.$$



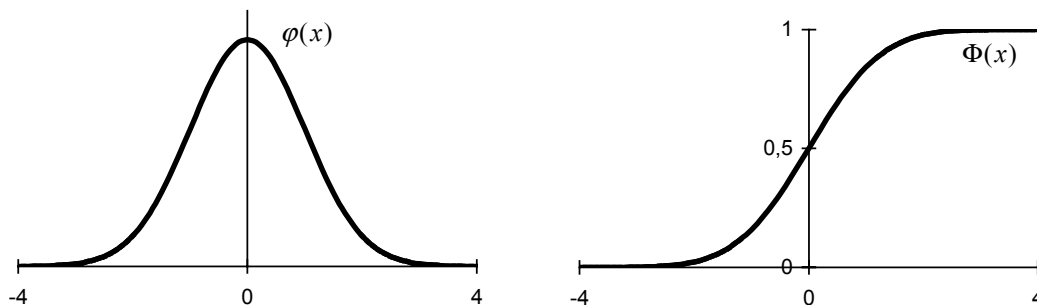
Poslední integrál vypočteme užitím následujícího triku. Integrujme per partes funkci $e^{-x^2/2}$. Dostaneme

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \left[xe^{-x^2/2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}dx.$$

To ale znamená, že $E(X^2) = 1$. Následně pak $D(X) = E(X^2) - E^2(X) = 1$. $\square$

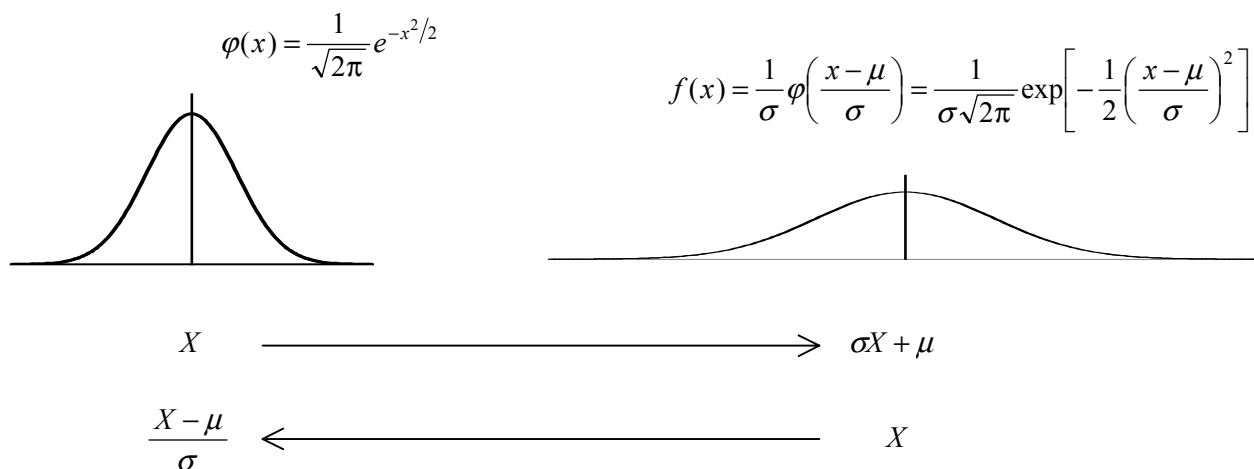
6. Definice. Distribuční funkci normovaného normálního rozdělení budeme označovat $\Phi(x)$. Jinak řečeno:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$



7. Poznámka. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

SCHÉMA



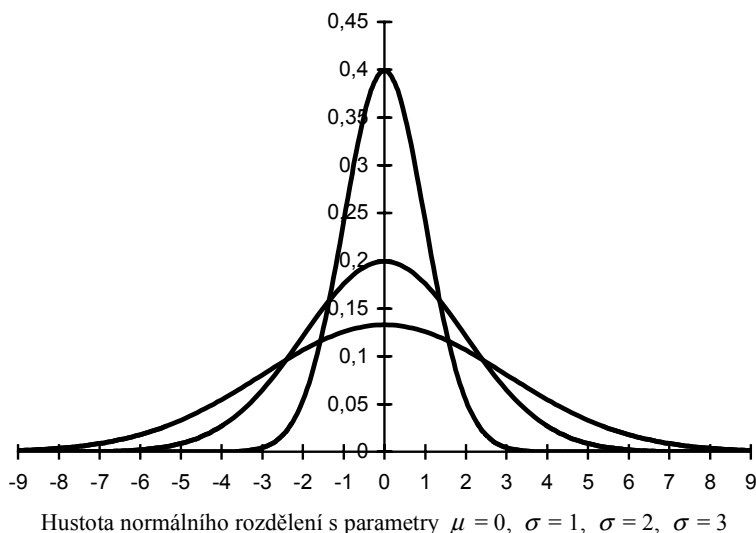
8. Definice. Normálním rozdělením s parametry μ , σ^2 , kde μ, σ ($\sigma > 0$) jsou daná reálná čísla, nazýváme spojité rozdělení s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

pro $-\infty < x < \infty$. Toto rozdělení značíme $N(\mu, \sigma^2)$ a skutečnost, že náhodná veličina X má rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ vyjadřujeme zápisem $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Graf funkce $f(x)$ se nazývá *Gaussova křivka*. (Normované normální rozdělení je tedy rozdělení s parametry $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$.)

9. Poznámka. Hustota $f(x)$ rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ má právě dva inflexní body, a to $\mu \pm \sigma$.

10. Tvzení. Modus, medián i střední hodnota rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ jsou totožné s parametrem μ , zatímco parametr σ^2 má význam rozptylu tohoto rozdělení.



11. Tvzení. Necht' μ, σ ($\sigma > 0$) jsou dané konstanty.

(a) Jestliže veličina X má rozdělení $N(0, 1)$, pak veličina $\sigma X + \mu$ má rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

(b) Jestliže veličina X má rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, pak veličina $(X - \mu)/\sigma$ má rozdělení $N(0, 1)$.

12. Důsledek (počítání s normálním rozdělením). Necht' $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Pak

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

Úloha 1. Předpokládejme, že hmotnost živočicha z jisté populace je veličina s rozdělením $N(60, 3^2)$.

Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný jedinec má hmotnost

a) větší než 65 kg?

b) v rozmezí 57 – 65 kg?

Řešení. Hmotnost živočicha označme X . Pak

$$P(X < 65) = P\left(\frac{X - 60}{3} < \frac{65 - 60}{3}\right) = \Phi\left(\frac{65 - 60}{3}\right) \doteq \Phi(1,67) \doteq 0,95.$$

Je tedy $P(X > 65) = 1 - P(X < 65) \doteq 0,05$. Podobně

$$\begin{aligned} P(57 < X < 65) &= P\left(\frac{57 - 60}{3} < \frac{X - 60}{3} < \frac{65 - 60}{3}\right) = \Phi\left(\frac{65 - 60}{3}\right) - \Phi\left(\frac{57 - 60}{3}\right) \doteq \Phi(1,67) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(1,67) - [1 - \Phi(1)] \doteq 0,79 \end{aligned}$$

13. Tvzení. Necht' X je náhodná veličina s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$ a necht' c, d jsou konstanty, přičemž $c \neq 0$. Pak veličina $cX + d$ má rozdělení $N(c\mu + d, (c\sigma)^2)$.

14. Věta (o konvoluci normálních rozdělení). Součet vzájemně nezávislých normálně rozdělených náhodných veličin má opět normální rozdělení.

Přesněji řečeno: Necht' X a Y jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Pak $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Důkaz. Vzhledem k tomu, že přičtením konstanty k veličině s normálním rozdělením obdržíme opět veličinu s normálním rozdělením, můžeme předpokládat, že $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Nuže nechť X a Y jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny, $X \sim N(0, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(0, \sigma_2^2)$ a $Z = X + Y$. Označme po řadě $f(x)$, $g(y)$ a $h(z)$ hustoty rozdělení veličin X , Y a Z . Vzorec pro konvoluci pak dává

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx = \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{(z-x)^2}{\sigma_2^2}\right)\right]dx.$$

Úpravou kvadratického trojčlenu

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{(z-x)^2}{\sigma_2^2}$$

v proměnné x na úplný čtverec dospějeme k jeho vyjádření ve tvaru

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{(z-x)^2}{\sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \left(x - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \cdot z\right)^2 + \frac{z^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Dosazením tohoto výrazu do integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{(z-x)^2}{\sigma_2^2}\right)\right]dx$$

a substitucí

$$y = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2} \left(x - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \cdot z\right)$$

dostaneme

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \left(x - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \cdot z\right)^2\right] dx = \\ &= \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right) \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right). \end{aligned}$$

Tudíž $X + Y \sim N(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, což bylo dokázat. $Y \sim N(0, \sigma_2^2)$. $\square$

Úloha 2. Do výtahu o nosnosti dvě stě padesát kilogramů nastoupí čtyři studentky. Předpokládejme, že hmotnost studentky (v kg) je veličina s rozdělením $N(60, 3^2)$. Jaká je pravděpodobnost, že výtah bude přetížený?

Řešení. Označme X_i hmotnost i -té studentky. Předpokládejme, že veličiny X_1, X_2, X_3, X_4 jsou vzájemně nezávislé a položíme $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$. Pak $X \sim N(240, 6^2)$, z čehož vyplývá, že $P(X > 250) \doteq 0,05$.

15. Věta (Lindebergova-Lévyho centrální limitní věta). *Nechť $X_1, X_2, \dots$ je posloupnost vzájemně nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením, s konečnou střední hodnotou μ a konečným nenulovým rozptylem σ^2 . Pak náhodná veličina $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ má pro $n \rightarrow \infty$ asymptoticky normální rozdělení.*

Přesněji řečeno: Položme $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Nechť $F_n(x)$ je distribuční funkce veličiny

$$\frac{Y_n - E(Y_n)}{\sigma(Y_n)}.$$

Pak pro každé $x \in \mathbf{R}$

$$F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x).$$

Použití: Nechť $n \rightarrow \infty$. Pak

$$P(a < Y_n < b) = P\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \doteq \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Příklady.

(1) Celkový výsledek hodu n hracími kostkami (tétoho druhu) je náhodná veličina, která má pro $n \rightarrow \infty$ asymptoticky normální rozdělení.

(2) Součet n čísel vybraných zcela náhodně a nezávisle na sobě z intervalu $(0,1)$ má pro $n \rightarrow \infty$ asymptoticky normální rozdělení.

(3) (Moivreova-Laplaceova věta)

Nechť $0 < p < 1$ je pevně dané číslo. Rozdělení $Bi(n, p)$ konverguje pro $n \rightarrow \infty$ k rozdělení normálnímu.

(4) Nechť ε je chyba, ke které dochází při zobrazení či odečtení výsledku na lineárním měřicím přístroji. Veličina ε má pak normální rozdělení.

(5) Předpokládejme, že velikost (délka, tloušťka, objem apod.) organismu (orgánu) je výsledkem spojitého růstu za stále stejných podmínek, bez deformujícího vlivu prostředí a bez interakce s ostatními organismy; tuto velikost označme X . Veličina X má přibližně normální rozdělení.

Použití Moivreovy-Laplaceovy věty:

(a) (Moivreova-Laplaceova věta v integrálním tvaru). Jestliže $X \sim Bi(n, p)$ a $n \rightarrow \infty$, pak

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}} < \frac{X - np}{\sqrt{npq}} < \frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) \doteq \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

(b) (Moivreova-Laplaceova věta v lokálním tvaru). Jestliže $X \sim Bi(n, p)$ a $n \rightarrow \infty$, pak

$$P(X = k) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)^2\right].$$

Úloha 3. Provedeme sto dvacet vzájemně nezávislých hodů pravidelnou hrací kostkou. Nechť X je aritmetický průměr výsledků. Určete $P(X \leq 3,4)$.

Řešení. Je

$$X = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{120}}{120},$$

kde X_i je výsledek i -tého hodu. Přitom $E(X_i) = 3,5$, $D(X_i) = \frac{35}{12}$ a veličiny $X_1, X_2, \dots, X_{120}$ jsou vzájemně nezávislé. Odtud plyne, že $E(X) = 3,5$ a $D(X) = \frac{35}{1440}$. Rozdělení veličiny X lze přitom

dle centrální limitní věty aproximovat rozdělením normálním. Jinak řečeno, $X \sim N(3,5; 0,156^2)$, odkud plyne, že $P(X \leq 3,4) = \Phi(-0,64) = 1 - \Phi(0,64) \doteq 0,26$.

Úloha 4. Provedeme sto dvacet vzájemně nezávislých hodů pravidelnou hrací kostkou. Necht' X je počet dvojek (šestek) v takové sérii hodů. Určete a) $P(X \geq 25)$, b) $P(X = 25)$.

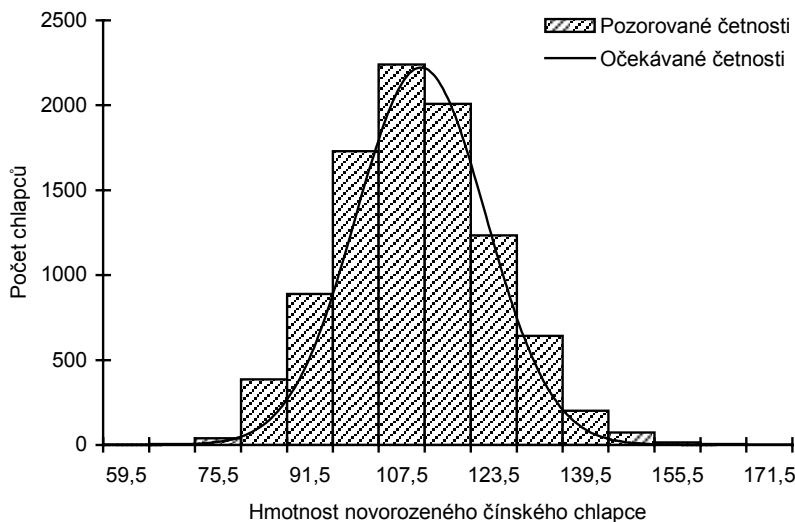
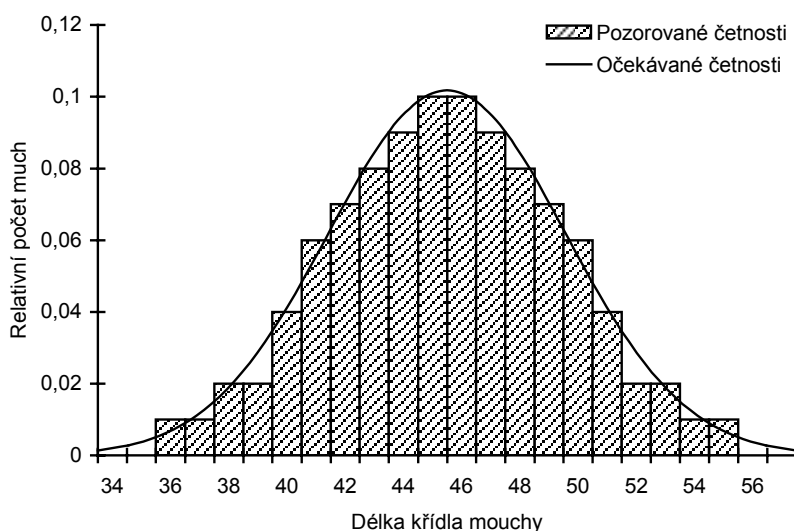
Řešení. Veličina X má rozdělení $Bi(120, \frac{1}{6})$. Toto rozdělení lze dle Moivreovy-Laplaceovy věty aproximovat normálním rozdělením $N(20; 4,08^2)$. Odtud plyne

$$\text{a) } P(X \geq 25) \doteq P(X > 24,5) = P\left(\frac{X - 20}{4,08} > \frac{24,5 - 20}{4,08}\right) \doteq 1 - \Phi(1,1) \doteq 0,135.$$

$$\text{b) } P(X = 25) \doteq \frac{1}{4,08 \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{25 - 20}{4,08}\right)^2\right] \doteq 0,046.$$

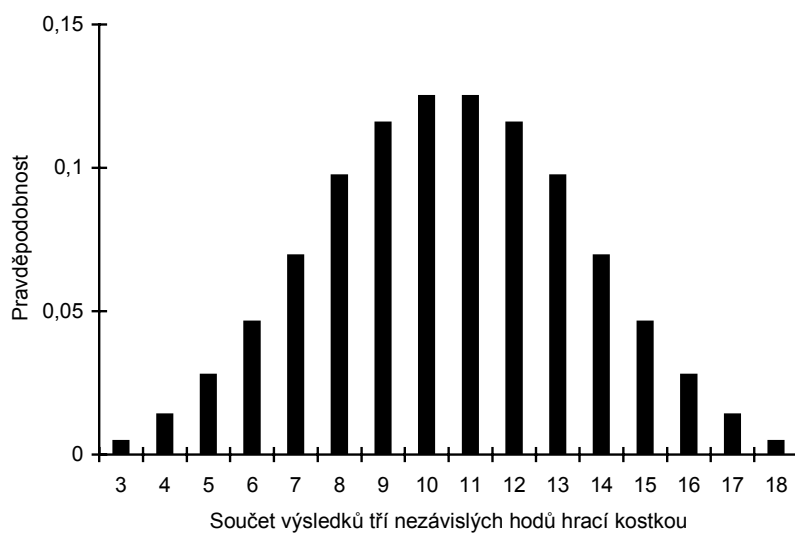
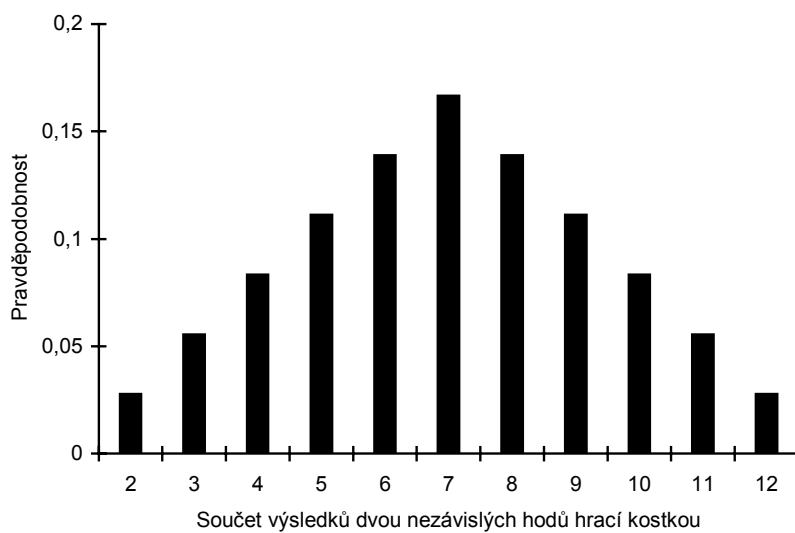
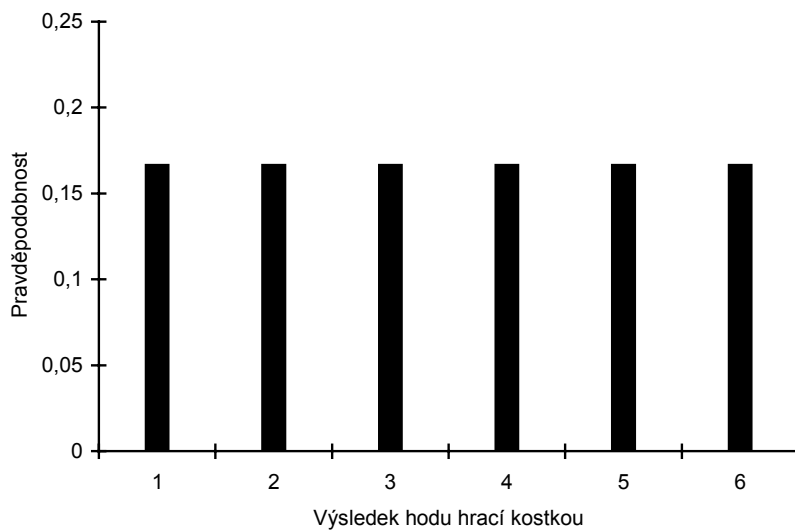
Přímý výpočet (bez aproximace) vede k výsledku $P(X \geq 25) \doteq 0,136$ a $P(X = 25) \doteq 0,044$.

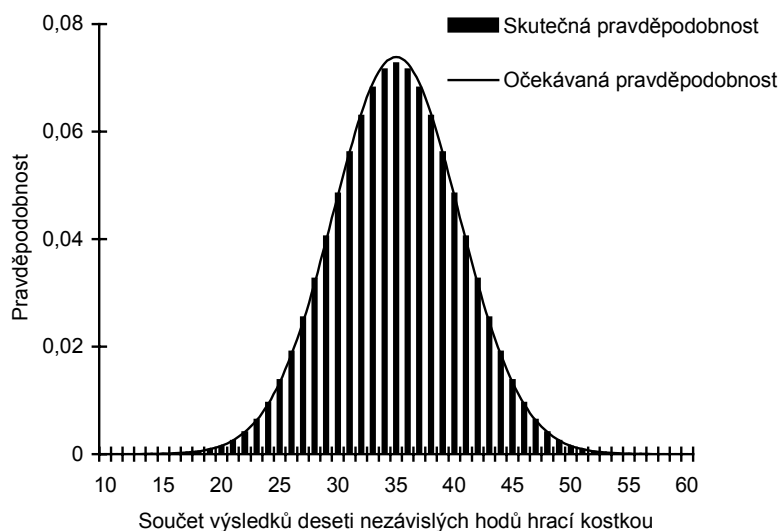
Shoda rozdělení empirických dat s normálním rozdělením.



(Jde o měření porízená z jednoho sta náhodně vybraných much, resp. devíti tisíc čtyři sta šedesáti pěti chlapců narozených v daném období.)

Ilustrace centrální limitní věty (součet výsledků hodů hrací kostkou).





16. Tvrzení. Necht' $X \sim N(0, 1)$. Pak

$$\begin{aligned} P(-1 < X < 1) &\doteq 0,68, \\ P(-2 < X < 2) &\doteq 0,95, \\ P(-3 < X < 3) &\doteq 0,997. \end{aligned}$$

17. Věta. Necht' $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Pak

$$P(\mu - k \cdot \sigma < X < \mu + k \cdot \sigma) = P(|X - \mu| < k \cdot \sigma) = P\left[\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| < k\right] = 2 \cdot \Phi(k) - 1.$$

Speciálně

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) &\doteq 0,68, \\ P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) &\doteq 0,95, \\ P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) &\doteq 0,997. \end{aligned}$$

Důsledek (pravidlo „3 σ “). Je prakticky jisté, že normálně rozdělená náhodná veličina se od své střední hodnoty neliší o více než 3σ , kde σ je směrodatná odchylka.

Cvičení

1. Předpokládejme, že rozdělení výšek stromů v porostu je normální se střední hodnotou čtrnáct metrů a směrodatnou odchylkou dva metry.
 - a) Určete dolní a horní kvartil tohoto rozdělení.
 - b) Jaká část výšek leží v intervalu (11, 16) ?

Řešení. a) Označíme-li výšku stromu h , pak dle předpokladů $h \sim N(14, 2^2)$. Z tabulek distribuční funkce $\Phi(x)$ normovaného normálního rozdělení zjistíme, že $\Phi(0,675) = 0,75016$. Horní kvartil normovaného normálního rozdělení je tedy roven 0,675. Odtud plyne, že horní kvartil rozdělení $N(14, 2^2)$ je roven $14 + 2 \cdot 0,675 = 15,35$. Jinak řečeno

$$P(h < 15,35) = P(h < 14 + 2 \cdot 0,675) = P\left(\frac{h-14}{2} < 0,675\right) \doteq 0,75.$$

Analogicky $P(h < 12,65) \doteq 0,25$.

$$\text{b) } P(11 < h < 16) = P\left(\frac{11-14}{2} < \frac{h-14}{2} < \frac{16-14}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1,5) = \Phi(1) - [1 - \Phi(1,5)] \doteq 0,77.$$

2. Necht' d je výčetní tloušťka smrku daného druhu, původu a věku pěstovaného určitým způsobem na stanovišti daného typu. Předpokládejme, že veličina d má normální rozdělení pravděpodobností se střední hodnotou čtrnáct centimetrů a směrodatnou odchylkou tři a půl centimetru. Dejme tomu, že na ploše je jeden tisíc stromů. Jaká část z těchto stromů bude
 - a) slabších než sedmnáct centimetrů?
 - b) silnějších než jedenáct centimetrů?
 - c) silnějších než jedenáct centimetrů a současně slabších než sedmnáct centimetrů?
 - d) slabších než devět centimetrů?

Řešení.

$$\text{a) } P(d < 17) = P\left(\frac{d-14}{3,5} < \frac{17-14}{3,5}\right) \doteq \Phi(0,86) \doteq 0,80.$$

Očekávaný počet stromů s tloušťkou menší než sedmnáct centimetrů je tedy asi $1000 \cdot 0,80 = 800$ stromů (tj. 80% z celkového počtu stromů).

b) 80%, c) 60%, d) 8%.

3. Délka kartáčku na zuby (v milimetrech) je náhodná veličina s rozdělením $N(150, 4^2)$, délka pouzdra (rovněž v milimetrech) má pak rozdělení $N(160, 3^2)$. Na konci výrobního procesu se kartáčky zasunují do pouzder. Jaká je pravděpodobnost, že se kartáček nevejde do pouzdra?

Řešení. Označme X délku pouzdra a Y délku kartáčku. Pak $X - Y \sim N(10, 5^2)$, tudíž $P(X - Y < 0) = \Phi(-2) \doteq 0,02275$.

4. Pěstujeme hrách s bílými nebo fialovými květy. Věříme v platnost Mendelových zákonů a předpokládáme tudíž, že rostlina vykvete fialově s pravděpodobností $\frac{3}{4}$. Jaká je pravděpodobnost, že z jednoho tisíce rostlin vykvete fialově
 - a) právě 750 rostlin,
 - b) více než 760 rostlin,
 - c) více než 720 a současně méně než 780 rostlin?

Řešení. Necht' X je počet rostlin, které vykvétou fialově. Veličina X má rozdělení $Bi(1000, \frac{3}{4})$; toto rozdělení lze přitom s velkou přesností aproximovat normálním rozdělením $N(750; 13,69^2)$.

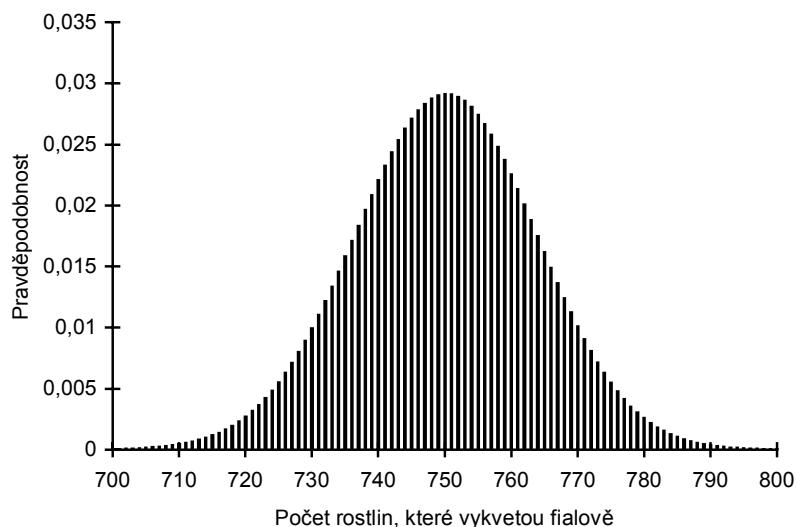
Tudíž

$$\text{a) } P(X = 750) \doteq \frac{1}{13,69 \cdot \sqrt{2\pi}} \doteq 0,029,$$

$$\text{b) } P(X > 760) = P\left(\frac{X - 750}{13,69} > \frac{760 - 750}{13,69}\right) \doteq 1 - \Phi(0,73) \doteq 0,23,$$

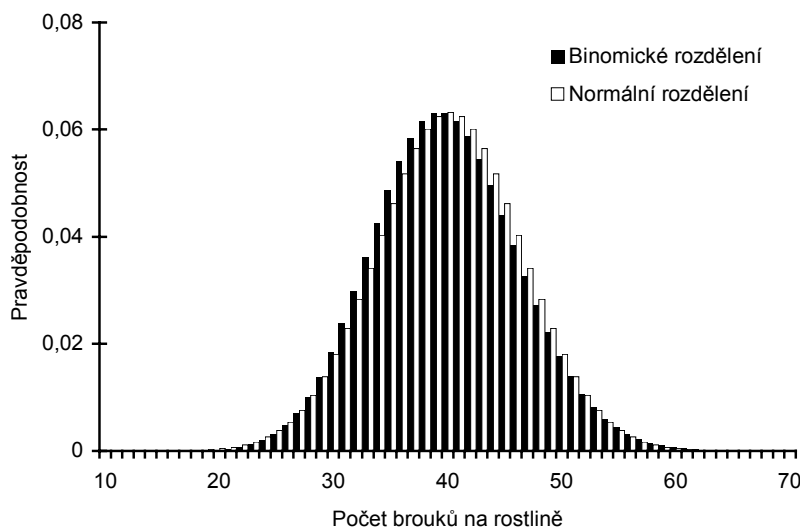
$$\begin{aligned} \text{c) } P(720 < X < 780) &= P\left(\frac{720 - 750}{13,69} < \frac{X - 750}{13,69} < \frac{780 - 750}{13,69}\right) \doteq \Phi(2,19) - \Phi(-2,19) = \\ &= 2 \cdot \Phi(2,19) - 1 \doteq 0,97 \end{aligned}$$

(viz též následující tyčkový diagram).



5. Deset tisíc brouků se čistě náhodně rozmístí na dvou stech padesáti rostlinách. Odhadněte s pravděpodobností 99% počet brouků na jedné rostlině.

Řešení.



Považujme počet brouků na rostlině za veličinu s rozdělením $Bi(10000, \frac{1}{250})$. Aproximace tohoto rozdělení normálním dává s 99% pravděpodobností odhad 24 až 56 brouků na jedné rostlině.

6. Při výrobě určitého druhu revolverových výškoměrů bylo zjištěno, že na jeden tisíc výškoměrů připadá v průměru pět vadných. Pro dodávku spotřebitelům bylo připraveno padesát stokusových zásilek. Odhadněte počet bezvadných zásilek.

Řešení. Pravděpodobnost, že zásilka je bezvadná, je $0,995^{100} \doteq 0,606$. Označíme-li tedy X počet bezvadných zásilek, pak $X \sim Bi(50; 0,606)$. Aproximace binomického rozdělení normálním dává $X \sim N(30,3; 3,5^2)$. Počet bezvadných zásilek se bude tudíž zhruba s 95% pravděpodobností nacházet v intervalu $[23, 37]$.

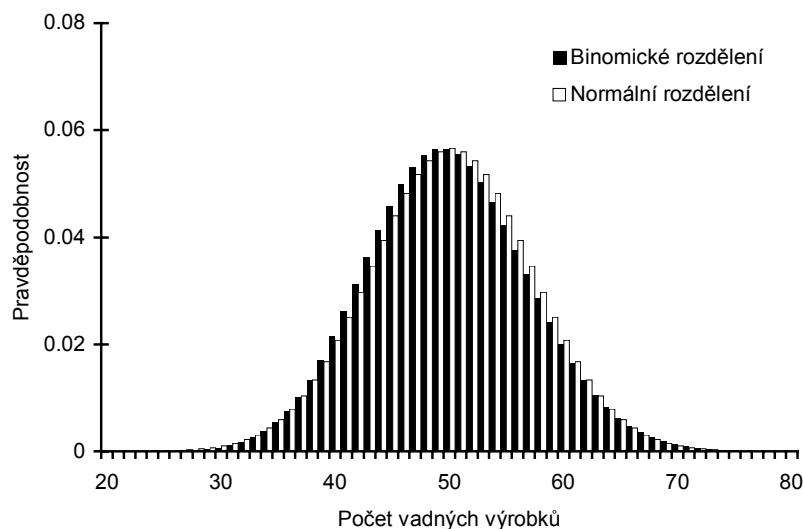
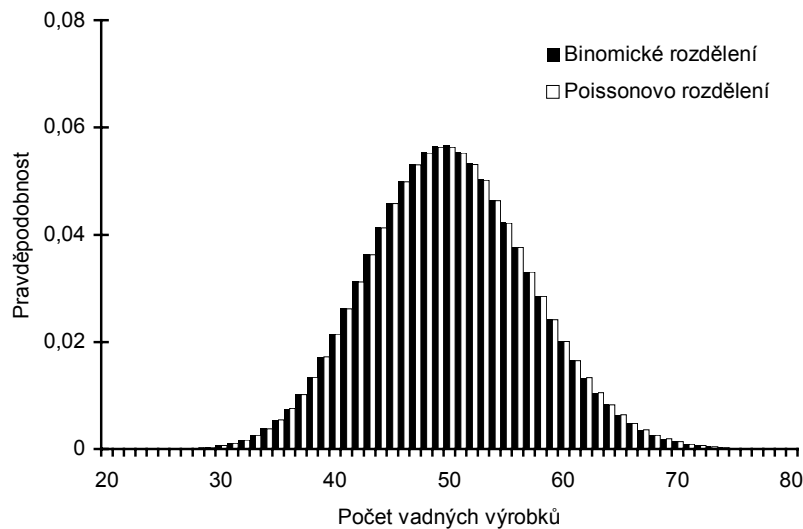
7. Předpokládejme, že výrobek vyrobený na automatické lince je vadný s pravděpodobností $p = 0,005$.

a) Jaká je pravděpodobnost, že mezi deseti tisíci náhodně vybranými výrobky je právě čtyřicet vadných?

b) Jaká je pravděpodobnost, že mezi deseti tisíci náhodně vybranými výrobky je nejvýše sedmdesát vadných?

Výsledek: a) Vyjde 0,0214. Aproximace binomického rozdělení normálním dává přitom výsledek 0,0207, aproximace rozdělením Poissonovým pak 0,0215.

b) Vyjde 0,997. Aproximace binomického rozdělení normálním dá výsledek 0,998.



8. Necht' $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ jsou čísla vybraná zcela náhodně a nezávisle na sobě z intervalu $(0, 1)$. Označme $\bar{X}$ jejich aritmetický průměr.

a) Určete $P(|\bar{X} - 1/2| < 0,1)$.

b) Kolik čísel je třeba vybrat, aby $P(|\bar{X} - 1/2| < 0,1) \geq 0,999$?

Řešení. a) Podle centrální limitní věty má veličina $\bar{X}$ přibližně rozdělení $N(1/2, 1/1200)$, tudíž

$$P(0,4 < \bar{X} < 0,6) = 2 \cdot \Phi(2\sqrt{3}) - 1 \doteq 0,99946.$$

b) Vybereme-li obecně n čísel $X_1, X_2, \dots, X_n$, přičemž n je dostatečně velké, pak $\bar{X} \sim N(1/2, 1/12n)$. Požadavek $P(|\bar{X} - 1/2| < 0,1) \geq 0,999$ pak vede k podmínce

$$\frac{0,1}{\frac{1}{\sqrt{12n}}} \geq 3,29,$$

čili $n \geq 91$.

9. Hmotnost fošny je náhodná veličina se střední hodnotou deset kilogramů a směrodatnou odchylkou půl kilogramu. Fošny se nakládají na vagóny po 2500 kusech. Nosnost vagónu je dvacet pět tun. Jaká je pravděpodobnost, že vagón bude přetížený o více než půl tuny?

Řešení. Označme m_i ($i = 1, 2, \dots, 2500$) hmotnost i -té fošny (v kg). Celkový náklad $m = \sum_{i=1}^{2500} m_i$ je

dle centrální limitní věty náhodnou veličinou s normálním rozdělením pravděpodobností, přesněji $m \sim N(25000, 25^2)$. Odtud plyne, že $P(m > 25500) = 1 - \Phi(20) \doteq 0$.

10. Při turnaji hází atlet oštěpem a snaží se dohodit co nejdál. Předpokládejme, že délka hodu je veličina s normálním rozdělením pravděpodobností se střední hodnotou šedesát metrů a směrodatnou odchylkou čtyři metry. Má-li atlet pět pokusů, jaká je pravděpodobnost, že překoná vzdálenost sedmdesát metrů?

Řešení. Pravděpodobnost, že atlet překoná při konkrétním pokusu vzdálenost sedmdesát metrů je rovna $p \doteq 0,00621$. Předpokládejme, že výsledky jednotlivých hodů jsou na sobě nezávislé. Pravděpodobnost, že závodník během turnaje (tj. v alespoň jednom pokusu) překoná vzdálenost sedmdesát metrů, je potom $1 - (1 - p)^5 \doteq 0,03$.

11. V osudí je dvacet pět míčků označených číslicemi 1, 2 a 3. Pět míčků je označeno číslicí 1, deset míčků číslicí 2 a deset míčků číslicí 3. Majitel osudí vám nabízí účast v následující hře. Vytáhnete náhodně jeden míček z osudí. V případě, že míček je označen číslicí 1, vyhráváte jednu korunu. V případě, že míček je označen číslicí 2, vyhráváte dvě koruny. Je-li však míček označen číslicí 3, prohráváte tři koruny.

a) Vytáhnete jeden míček a vrátíte jej zpět. Provozovatel míčky důkladně zamíchá a vy poté vytáhnete další míček. (Jinak řečeno, hrajete dvě kola). Jaká je pravděpodobnost, že utrpíte ztrátu?

b) Jaká je pravděpodobnost, že po sto kolech budete prohrávat alespoň padesát korun?

12. Vyrazíme na „náhodný výlet“. Házíme neustále pravidelnou hrací kostkou, přičemž v případě, že padne pětka nebo šestka, uděláme krok vzad, v opačném případě uděláme krok vpřed. Krok má přitom délku jeden metr. Jaká je pravděpodobnost, že po třech tisících kroků se přemístíme o více než o devět set metrů vpřed?