Úloha 1. Nechť $X \sim R(0,1)$ a $Y = \sqrt{X}$. Jinak řečeno, Y je odmocnina čísla vybraného zcela náhodně z intervalu $(0,1)$. Popište rozdělení veličiny Y a určete jeho modus, medián, střední hodnotu a rozptyl.

Řešení. Označme po řadě $F(y)$ a $f(y)$ distribuční funkci a hustotu rozdělení veličiny Y. Pak

$$F(y) = P(Y < y) = P(\sqrt{X} < y) = \begin{cases} 0 \quad \text{pro} \quad y \le 0\,, \\ P(X < y^2) = y^2 \quad \text{pro} \quad 0 < y < 1\,, \\ 1 \quad \text{pro} \quad y \ge 1\,. \end{cases}$$

Odtud plyne, že

$$f(y) = F'(y) = \begin{cases} 0 \quad \text{pro} \quad y \le 0\,, \\ 2y \quad \text{pro} \quad 0 < y < 1\,, \\ 0 \quad \text{pro} \quad y \ge 1\,. \end{cases}$$

Speciálně je $\hat{y} = 1$ (bod s největší hustotou pravděpodobnosti) a $\tilde{y} = \sqrt{2}/2$ (bod, v němž distribuční funkce nabývá hodnoty $1/2$). Dále je

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 2y^2\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\,.$$

Podobně

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 2y^3\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,,$$

a tedy

$$D(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{1}{18}\,.$$

Úloha 2. Nechť X a Y jsou dvě čísla vybraná zcela náhodně a nezávisle na sobě z intervalu $(0,1)$. Položme $Z = \max(X,Y)$. Popište rozdělení pravděpodobností veličiny Z.

Řešení. Označme po řadě $F(z)$ a $f(z)$ distribuční funkci a hustotu rozdělení veličiny Z. Pak

$$F(z) = P(Z < z) = P[(X < z)\ \&\ (Y < z)] = P(X < z)\cdot P(Y < z) = \begin{cases} 0 \quad \text{pro} \quad z \le 0\,, \\ z^2 \quad \text{pro} \quad 0 < z < 1\,, \\ 1 \quad \text{pro} \quad z \ge 1\,. \end{cases}$$

Maximum dvou čísel vybraných zcela náhodně a nezávisle na sobě z intervalu $(0,1)$ *má tedy stejné rozdělení pravděpodobností jako druhá odmocnina čísla vybraného zcela náhodně z intervalu* $(0,1)$.

Úloha 3. Nechť X a Y jsou dvě čísla vybraná zcela náhodně a nezávisle na sobě z intervalu $(0,1)$. Položme $Z = \min(X,Y)$. Popište rozdělení pravděpodobností veličiny Z a vypočítejte jeho modus, medián, střední hodnotu a rozptyl.

Návod: Uvědomte si, že *rozdělení minima dvou čísel vybraných zcela náhodně a nezávisle na sobě z intervalu* $(0,1)$ *je zrcadlovým obrazem rozdělení jejich maxima*.

Úloha 4. Určete konstantu c tak, aby funkce

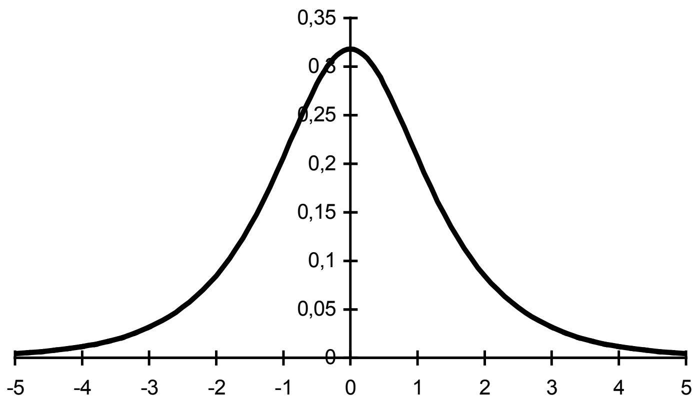
$$f(x) = \frac{c}{e^{-x} + e^{x}}$$

byla hustotou rozdělení nějaké náhodné veličiny X. Pro takovou veličinu určete dále $P(-3 < X < 3)$.

Výsledek: Konstanta c se určí z podmínky

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

Vyjde $c = 2/\pi$. Dále pak $P(-3 < X < 3) \doteq 0{,}937$.



Úloha 5. Nakreslete graf funkce

$$f(x) = \frac{1}{|x| + 1}$$

a dokažte, že neexistuje konstanta c taková, aby funkce $cf(x)$ byla hustotou rozdělení nějaké náhodné veličiny.

Návod: Je $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \infty$.

Úloha 6. Dokažte, že funkce definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0\,, \\ \cos x & \text{pro } 0 \le x \le \pi/2\,, \\ 0 & \text{pro } x > \pi/2 \end{cases}$$

je hustotou rozdělení nějaké náhodné veličiny X. Určete $P(X > \pi/4)$. Dále určete distribuční funkci veličiny X a vypočítejte její modus, medián, střední hodnotu a rozptyl.

Řešení. Funkce $f(x)$ je nezáporná, přičemž

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1\,,$$

což bylo dokázat. Dále je

$$P(X > \pi/4) = 1 - P(X < \pi/4) = 1 - \int_{-\infty}^{\pi/4} f(x)\mathrm{d}x = 1 - \int_{0}^{\pi/4} \cos x\mathrm{d}x$$

$$= 1 - [\sin x]_0^{\pi/4} = 1 - (\sqrt{2}/2 - 0) = 1 - \sqrt{2}/2 \doteq 0{,}29.$$

Distribuční funkce má vyjádření

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0\,, \\ \sin x & \text{pro } 0 \le x \le \pi/2\,, \\ 1 & \text{pro } x > \pi/2 \end{cases}$$

Konečně je $\hat{x} = 0,\ \tilde{x} = \pi/6,\ E(X) = \dfrac{\pi}{2} - 1,\ D(X) = \pi - 3$.

Tvrzení (o střední hodnotě transformované náhodné veličiny). *Jestliže X je spojitá náhodná veličina s hustotou rozdělení $f(x)$ a $t(x)$ je spojitá reálná funkce, pak pro střední hodnotu veličiny $t(X)$ platí*

$$E[t(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} t(x) f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Úloha 7. Nechť α je pevně dané reálné číslo a X je číslo vybrané zcela náhodně z intervalu $(0,1)$. Určete medián a střední hodnotu veličiny X^{α}.

Řešení. Snadno nahlédneme, že medián veličiny X^{α} je $2^{-\alpha}$. Dle předchozího tvrzení pak

$$E(X^{\alpha}) = \int_0^1 x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{\alpha+1}\,, & \text{jestliže } \alpha > -1 \\ \infty\,, & \text{jestliže } \alpha \le -1\,. \end{cases}$$

Speciálně

$$E(\sqrt{X}) = E(X^{1/2}) = \frac{2}{3} \quad \text{a} \quad E(1/X) = E(X^{-1}) = \infty\,.$$

Úloha 8. Nechť τ je veličina s exponenciálním rozdělením s parametrem λ. Jinak řečeno τ je spojitá náhodná veličina s hustotou $f(t)$ definovanou předpisem

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{pro } t > 0\,, \\ 0 & \text{pro } t \le 0\,. \end{cases}$$

Určete distribuční funkci, modus, medián, střední hodnotu a rozptyl tohoto rozdělení.

Řešení. Zřejmě je $\hat{\tau} = 0$. Pro distribuční funkci obdržíme vyjádření

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{pro } t > 0\,, \\ 0 & \text{pro } t \le 0\,. \end{cases}$$

Medián $\tilde{\tau}$ získáme řešením rovnice $F(\tilde{\tau}) = 1/2$. Vyjde $\tilde{\tau} = \ln 2/\lambda$. Dále je

$$E(\tau) = \int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t} \mathrm{d}t \,.$$

Položme $u = t$, $v' = \lambda e^{-\lambda t}$ a použijme integraci per partes. Dostaneme

$$E(\tau) = -\left[t e^{-\lambda t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = -\left[t e^{-\lambda t}\right]_0^\infty - \frac{1}{\lambda}\left[e^{-\lambda t}\right]_0^\infty = 1/\lambda \,.$$

Podobně

$$E(\tau^2) = \int_0^\infty \lambda t^2 e^{-\lambda t} \mathrm{d}t \,.$$

Položme $u = t^2$, $v' = \lambda e^{-\lambda t}$ a použijme integraci per partes. Dostaneme

$$E(\tau^2) = -\left[t^2 e^{-\lambda t}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty t e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = 2/\lambda^2 \,.$$

Tudíž

$$D(\tau) = E(\tau^2) - E^2(\tau) = 1/\lambda^2 \,.$$

Úloha 9. Nechť střední délka života jedince v populaci s konstantní mortalitou je třicet let.

a) S jakou pravděpodobností se jedinec dožije čtyřiceti let?

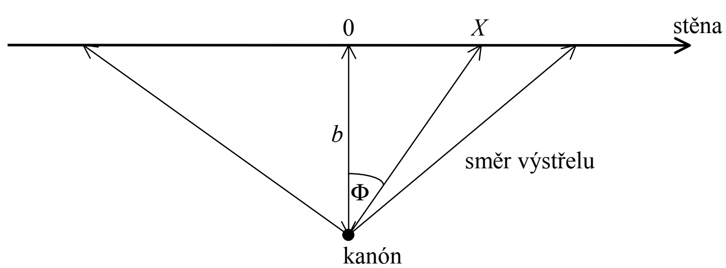
b) S jakou pravděpodobností se desetiletý jedinec dožije čtyřiceti let?

c) S jakou pravděpodobností jedinec zemře mezi deseti a čtyřiceti lety?

d) Jakého věku se dožije „v průměru“ polovina jedinců?

Výsledek: a) $e^{-4/3} \doteq 0{,}26$, b) $e^{-4/3}/e^{-1/3} = e^{-1} \doteq 0{,}37$, c) $e^{-1/3} - e^{-4/3} \doteq 0{,}45$, d) $30 \cdot \ln 2 \doteq 20{,}8$

Úloha 10 (Cauchyovo rozdělení). Střelec střílí z kanónu na nekonečně dlouhou stěnu, která se nachází ve vzdálenosti b od kanónu. Kanón se otáčí rovnoměrnou rychlostí střídavě doleva a doprava. Maximální úhlová odchylka hlavně kanónu od směru kolmého ke stěně je přitom $\pm 90°$. Při každé otočce zvolí střelec zcela náhodně právě jediný okamžik, kdy z kanónu vystřelí. Označme X „souřadnici“ zásahu (nulová hodnota souřadnice odpovídá výstřelu ve směru kolmém ke stěně). Popište rozdělení náhodné veličiny X a dokažte, že toto rozdělení nemá střední hodnotu.

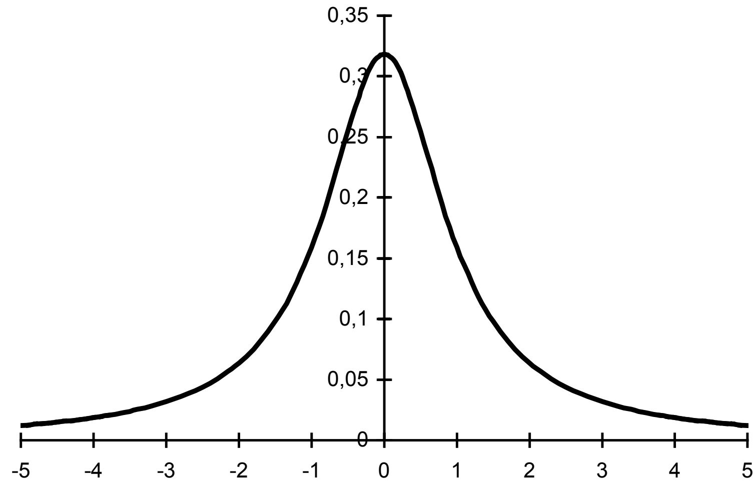


Řešení. Označme Φ velikost úhlové odchylky směru výstřelu od směru kolmého ke stěně. Dle zadání úlohy je Φ náhodná veličina s rozdělením $R(-\pi/2, \pi/2)$. Předpokládejme nejprve, že $b = 1$, tj. $X = \mathrm{tg}\,\Phi$. Označme po řadě $F(x)$ a $f(x)$ distribuční funkci a hustotu rozdělení veličiny X. Pak

$$F(x) = P(X < x) = P(\mathrm{tg}\Phi < x) = P(\Phi < \mathrm{arctg}\,x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\,x + \frac{1}{2} \,,$$

a tedy

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + x^2} \,.$$



Hustota Cauchyova rozdělení s parametry $a = 0$, $b = 1$

Pro obecné b je $X = b\,\mathrm{tg}\,\Phi$ a

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{b}{b^2 + x^2} .$$

Konečně, přiřadíme-li bodu stěny s nejmenší vzdáleností od kanónu souřadnici a (namísto souřadnice nulové), je $X = a + b\,\mathrm{tg}\,\Phi$ a

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{b}{b^2 + (x-a)^2} .$$

Výše popsané rozdělení se nazývá *Cauchyovo* (s parametry a, b). Pro $a = 0$, $b = 1$ je Cauchyovo rozdělení speciálním případem tzv. *Studentova t rozdělení.*

Pokusme se nyní vypočítat střední hodnotu Cauchyova rozdělení (pokud by střední hodnota existovala, musela by být vzhledem k symetrii Cauchyova rozdělení rovna hodnotě parametru a). Zřejmě se přitom můžeme omezit na případ $a = 0,\ b = 1$. Dle definice střední hodnoty je pak

$$E(X) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x .$$

Funkce $\frac{x}{1+x^2}$ je lichá, přičemž její kladná i záporná část mají stejný integrál; totiž $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$. Tento integrál nabývá však hodnoty ∞ (stačí provést substituci $x^2 = y$). Výsledkem výpočtu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$ je tedy neurčitý (a v daném kontextu nedefinovatelný) výraz $\infty - \infty$. Empirickým důsledkem tohoto faktu je skutečnost, že aritmetický průměr vzájemně nezávislých náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ s Cauchyovým rozdělením pravděpodobností s týmiž parametry a, b není stabilní, tj. nemá tendenci přibližovat se s rostoucím n k nějaké pevné hodnotě. Lze přitom ukázat, že tento průměr má bez ohledu na velikost čísla n opět Cauchyovo rozdělení s parametry a, b. Chce-li tedy pozorovatel, který pozoruje zásahy děla na stěně, ale dělo přitom nevidí, odhadnout polohu tohoto děla (tj. hodnotu parametru a), nebude mít úspěch, jestliže ze zaznamenaných souřadnic zásahů vypočítá aritmetický průměr. Polohu děla lze ovšem poměrně přesně lokalizovat mediánem jednotlivých zásahů. Nejlepší odhad této polohy lze zkonstruovat užitím tzv. metody maximální věrohodnosti.

Úloha 11.

a) Nechť X a Y jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny, $X \sim R(0,1)$, $Y \sim R(0,2)$. Dokažte, že součet $X+Y$ má „lichoběžníkové“ rozdělení a určete pravděpodobnost, že tento součet je větší než jedna. Dále určete modus, medián, střední hodnotu a rozptyl veličiny $X+Y$.

b) Nechť X je součet čtyř čísel vybraných zcela náhodně a nezávisle na sobě z intervalu $(0,1)$. Určete modus, medián, střední hodnotu a rozptyl veličiny X.